Aalborg Universitet

Kontinuummekanik

VII - funktioner af tensorargumenter

Rathkjen, Arne

Publication date:
1999

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

Link to publication from Aalborg University

Citation for published version (APA):
Rathkjen, A. (1999). *Kontinuummekanik: VII - funktioner af tensorargumenter*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. Team Bind R9911 Nr. 1999.1

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from vbn.aau.dk on: May 05, 2023

Aalborg **UNIVERSITET**

Kontinuumm

Kontinuummekanik VII - Funktioner af tensorargumenter

Arne Rathkjen

Instituttet for Bygningsteknik, Aalborg Universitet
Team 1999.1
ISSN 1395-7953 R9911

A. RATHKJEN

KONTINUUMMEKANIK

TEAM 1999.1

VII - FUNKTIONER AF TENSORARGUMENTER

JULI 1999

ISSN 1395-7953 R9911

VII FUNKTIONER AF TENSORARGUMENTER

Tensorer som funktioner af andre tensorer er i et vist omfang behandlet tidligere, således er for eksempel funktioner af stedvektoren behandlet i afsnit 5, hvor blandt andet gradienttensoren $\nabla \underset{\sim}{L}$ indføres. I afsnit 6 indføres en andenordens tensors hovedinvarianter, som altså er skalære funktioner af en tensor af anden orden.

En mere generel behandling af tensorer som funktioner af andre tensorer skal gives i dette kapitel. I afsnit 26 er emnet bestemmelse af differentialtensoren $D\underset{\sim}{L}$, mens symmetriforholdene for tensorer henholdsvis funktioner af tensorer behandles i afsnit 27 og 28.

26. DIFFERENTIALTENSOREN

Når en en tensor $\underset{\sim}{L}$ af l'te orden er en funktion af en tensor $\underset{\sim}{M}$ af m'te orden, skriver man

$$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M}) \tag{26.1}$$

og funktionsværdien svarende til argumentet $\underset{\sim}{M} + \Delta\underset{\sim}{M}$ skrives $\underset{\sim}{L} + \Delta\underset{\sim}{L}$, så man har

$$\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M}) + \Delta\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M}) = \underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M} + \Delta\underset{\sim}{M}) \tag{26.2}$$

eller

$$\Delta\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M}) = \underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M} + \Delta\underset{\sim}{M}) - \underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M}) \tag{26.3}$$

Skrives

$$\Delta\underset{\sim}{M} = \Delta h\underset{\sim}{B} \tag{26.4}$$

hvor Δh er en skalar, og $\underset{\sim}{B}$ er en tensor af m'te orden som $\underset{\sim}{M}$ og $\Delta\underset{\sim}{M}$, indføres $\underset{\sim}{L}'$, *den afledede* af $\underset{\sim}{L}$, ved

$$\underset{\sim}{L}' = \lim_{\Delta h \to 0}(\Delta\underset{\sim}{L}/\Delta h) \tag{26.5}$$

og man har

$$\Delta\underset{\sim}{L} = \Delta h\underset{\sim}{L}' + \underset{\sim}{0}(\Delta h) \tag{26.6}$$

Sættes *differentialet* af $\underset{\sim}{L}$

$$d\underset{\sim}{L} = \Delta h\underset{\sim}{L}' \tag{26.7}$$

har man

$$\Delta\underset{\sim}{L} = d\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{0}(\Delta h) \tag{26.8}$$

og med

$$dh = \Delta h \tag{26.9}$$

er

$$d\underset{\sim}{L} = dh\underset{\sim}{L}' \tag{26.10}$$

eller

$$\underset{\sim}{L}' = d\underset{\sim}{L}/dh \tag{26.11}$$

Differentialtensoren $D\underset{\sim}{L}$ indføres nu ved

$$L' = \underset{\sim}{B} \circ D\underset{\sim}{L} \tag{26.12}$$

hvor ringsymbolet $\circ$ repræsenterer m prikprodukter, jf. dobbeltprodukterne i afsnit 4.8. Hermed bliver differentialet

$$d\underset{\sim}{L} = dh\underset{\sim}{B} \circ D\underset{\sim}{L} = \Delta\underset{\sim}{M} \circ D\underset{\sim}{L} \tag{26.13}$$

og med

$$d\underset{\sim}{M} = \Delta\underset{\sim}{M} = dh\underset{\sim}{B} \tag{26.14}$$

er

$$d\underset{\sim}{L} = d\underset{\sim}{M} \circ D\underset{\sim}{L} \tag{26.15}$$

Ofte skrives differentialtensoren

$$D\underset{\sim}{L} = d\underset{\sim}{L}/d\underset{\sim}{M} \tag{26.16}$$

Tensorerne $\underset{\sim}{L}$, $\Delta\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{L}'$ og $d\underset{\sim}{L}$ er af l'te orden, $\underset{\sim}{M}$, $\Delta\underset{\sim}{M}$, $\underset{\sim}{B}$ og $d\underset{\sim}{M}$ er af m'te orden og differentialtensoren $D\underset{\sim}{L}$ er af orden $l + m$.

Kendes differentialtensoren $D\underset{\sim}{L}$ kan man bestemme den afledede $\underset{\sim}{L}'$ svarende til ethvert valg af $\underset{\sim}{B} = d\underset{\sim}{M}/dh$ ved

$$\underset{\sim}{L}' = \underset{\sim}{B} \circ D\underset{\sim}{L} \tag{26.17}$$

Differentialtensoren kan derimod ikke bestemmes ud fra kendskabet til blot en afledet $\underset{\sim}{L}'$.

I stedet for at skrive

$$d\underset{\sim}{M} = dh\underset{\sim}{B} \tag{26.18}$$

hvor $\underset{\sim}{B}$ er proportional med $d\underset{\sim}{M}$, skrives nu

$$d\underset{\sim}{M} = dM^{kl\cdot\cdot}\underset{\sim}{B}_{kl\cdot\cdot} \tag{26.19}$$

hvor $\underset{\sim}{B}_{kl\cdots}$ er 3^m lineært uafhængige tensorer af m'te orden, jf. afsnit 4.6. Hermed bliver

$$d\underset{\sim}{L} = d\underset{\sim}{M} \circ D\underset{\sim}{L} = dM^{kl\cdot\cdot}\underset{\sim}{B}_{kl\cdot\cdot} \circ D\underset{\sim}{L} \tag{26.20}$$

og de *partielle afledede* af $\underset{\sim}{L}$ indføres ved

$$\underset{\sim}{L}'_{kl\cdots} = \partial\underset{\sim}{L}/\partial M^{kl\cdot\cdot} = \underset{\sim}{B}_{kl\cdot\cdot} \circ D\underset{\sim}{L} \tag{26.21}$$

hvorefter differentialtensoren udtrykkes ved

$$D\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{B}^{pq\cdot\cdot}\underset{\sim}{L}'_{pq\cdot\cdot} \tag{26.22}$$

hvor $\underset{\sim}{B}^{pq\cdots}$ ligesom $\underset{\sim}{B}_{rs\cdots}$ er 3^m lineært uafhængige tensorer af m'te orden der, jf. (3.16), opfylder

$$\underset{\sim}{B}_{kl\cdot\cdot} \circ \underset{\sim}{B}^{mn\cdot\cdot} = \delta_k^m \delta_l^n \cdots \tag{26.23}$$

Som et eksempel kan anføres

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{B}_{klpq} &= \bar{b}_k\bar{b}_l\bar{b}_p\bar{b}_q \\ \underset{\sim}{B}^{mnrs} &= \bar{b}^m\bar{b}^n\bar{b}^r\bar{b}^s \end{aligned} \tag{26.24}$$

hvormed fås

$$\underset{\sim}{B}_{klpq} \circ \underset{\sim}{B}^{mnrs} = \bar{b}_k \cdot \bar{b}^m\,\bar{b}_l \cdot \bar{b}^n\,\bar{b}_p \cdot \bar{b}^r\,\bar{b}_q \cdot \bar{b}^s = \delta_k^m\delta_l^n\delta_p^r\delta_q^s \tag{26.25}$$

Hvis funktionen $\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M})$ er givet implicit, dvs.

$$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{P}) \;, \quad \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{M}) \tag{26.26}$$

finder man

$$\frac{d\underset{\sim}{L}}{d\underset{\sim}{M}} = \frac{d\underset{\sim}{P}}{d\underset{\sim}{M}} \circ \frac{d\underset{\sim}{L}}{d\underset{\sim}{P}} \tag{26.27}$$

Er $\underset{\sim}{L}$ en funktion af to tensorer $\underset{\sim}{M}$ af m'te orden og $\underset{\sim}{N}$ af n'te orden

$$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M}, \underset{\sim}{N}) \tag{26.28}$$

indføres de *partielle differentialtensorer* $\partial\underset{\sim}{L}/\partial\underset{\sim}{M}$ og $\partial\underset{\sim}{L}/\partial\underset{\sim}{N}$ og differentialet på $\underset{\sim}{L}$ udtrykkes som

$$d\underset{\sim}{L} = d\underset{\sim}{M} \circ \partial\underset{\sim}{L}/\partial\underset{\sim}{M} + d\underset{\sim}{N} \circ \partial\underset{\sim}{L}/\partial\underset{\sim}{N} \tag{26.29}$$

De to ringprodukter i (26.29) er af m'te henholdsvis n'te orden.

I udtrykket $d\underset{\sim}{L} = d\underset{\sim}{M} \circ d\underset{\sim}{L}$ kan man sætte $d\underset{\sim}{L} = d\overline{r} \cdot \operatorname{grad} \underset{\sim}{L}$ og $d\underset{\sim}{M} = d\overline{r} \cdot \operatorname{grad} \underset{\sim}{M}$, og får hermed

$$d\overline{r} \cdot \operatorname{grad} \underset{\sim}{L} = d\overline{r} \cdot \operatorname{grad} \underset{\sim}{M} \circ D\underset{\sim}{L} \tag{26.30}$$

Heraf ses, at $\operatorname{grad} \underset{\sim}{L}$ bliver

$$\operatorname{grad} \underset{\sim}{L} = \operatorname{grad} \underset{\sim}{M} \circ D\underset{\sim}{L} \tag{26.31}$$

når $\underset{\sim}{L}$ ikke eksplicit afhænger af stedvektoren $\overline{r}$.

Hvis $\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M}, \overline{r})$ yderligere afhænger eksplicit af $\overline{r}$, finder man

$$\operatorname{grad} \underset{\sim}{L} = \partial\underset{\sim}{L}/\partial\overline{r} + \operatorname{grad} \underset{\sim}{M} \circ \partial\underset{\sim}{L}/\partial\underset{\sim}{M} \tag{26.32}$$

26.1 Funktioner af skalarer

Rotationstensoren $\underset{\sim}{R}$, se afsnit 6.6

$$\overline{\overline{R}} = \hat{a}\hat{a} + (\overline{\overline{I}} - \hat{a}\hat{a}) \cos\chi - \hat{a} \times \overline{\overline{I}} \sin\chi \tag{26.33}$$

kan, med

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}} &= \hat{a} \times \overline{\overline{I}} = \overline{\overline{I}} \times \hat{a} = -\overline{\overline{\overline{E}}} \cdot \hat{a} = -\overline{\overline{A}}^T \\ \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{A}} &= \overline{\overline{A}}^2 = \hat{a}\hat{a} - \overline{\overline{I}} \\ \overline{\overline{A}}^3 &= -\overline{\overline{A}} \end{aligned} \tag{26.34}$$

jf. afsnit 4.7, skrives

$$\underset{\sim}{R} = \hat{a}\hat{a} - \underset{\sim}{A}^2 \cos\chi + \underset{\sim}{A} \sin\chi$$
$$\underset{\sim}{R}^T = \hat{a}\hat{a} - \underset{\sim}{A}^2 \cos\chi - \underset{\sim}{A} \sin\chi = \underset{\sim}{R}^{-1} \tag{26.35}$$

og man finder

$$d\underset{\sim}{R}/d\chi = \underset{\sim}{A}^2 \sin\chi + \underset{\sim}{A} \cos\chi = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{A}$$
$$d\underset{\sim}{R}^T/d\chi = \underset{\sim}{A}^2 \sin\chi - \underset{\sim}{A} \cos\chi = \underset{\sim}{A}^T \cdot \underset{\sim}{R}^T = \underset{\sim}{R}^T \cdot \underset{\sim}{A}^T \tag{26.36}$$

hvor drejningsaksen $\hat{a}$ er fast i rummet og $\underset{\sim}{A}$ derfor en konstant tensor.

26.2 Funktioner af vektorer

Først betragtes

$$\overline{u} = \underset{\sim}{L}(\overline{v}) = \overline{v} \tag{26.37}$$

og dermed

$$d\overline{u} = d\overline{v} = d\overline{v} \cdot \overline{\overline{I}} \tag{26.38}$$

som viser, at differentialtensoren i dette tilfælde er identitetstensoren af anden orden

$$D\overline{u} = \overline{\overline{I}} \tag{26.39}$$

Lad herefter $\underset{\sim}{L}(\overline{v})$ være

$$\underset{\sim}{L}(\overline{v}) = \overline{v} * \underset{\sim}{U} \tag{26.40}$$

hvor $\underset{\sim}{U}$ er en konstant tensor og $*$ er et anvendeligt produkt, jf. afsnit 5.4. Med $d\overline{v} = dv^k \overline{b}_k$ bliver

$$\underset{\sim}{L}'_k = \partial \underset{\sim}{L}/\partial v^k = \overline{b}_k * \underset{\sim}{U} \tag{26.41}$$

og dermed

$$D\underset{\sim}{L} = d\underset{\sim}{L}/d\overline{v} = \overline{b}^k \overline{b}_k * \underset{\sim}{U} = \overline{\overline{I}} * \underset{\sim}{U} \tag{26.42}$$

Er derimod $\underset{\sim}{L}(\overline{v})$ givet som

$$\underset{\sim}{L}(\overline{v}) = \underset{\sim}{U} * \overline{v} \tag{26.43}$$

bliver

$$\underset{\sim}{L}'_k = \underset{\sim}{U} * \overline{b}_k \tag{26.44}$$

og derfor

$$D\underset{\sim}{L} = \overline{b}^k \underset{\sim}{U} * \overline{b}_k \tag{26.45}$$

Er $*$ en prik og $\underset{\sim}{U}$ en vektor, bliver resultatet i begge tilfælde

$$D\underset{\sim}{L} = \overline{\overline{U}} \tag{26.46}$$

Betragtes herefter $\underset{\sim}{L}$ som en funktion af de to vektorargumenter $\overline{u}$ og $\overline{v}$

$$\underset{\sim}{L}(\overline{u}, \overline{v}) = \overline{u} * \overline{v} \tag{26.47}$$

har man nu de partielle differentialtensorer

$$\begin{aligned} &\partial\underset{\sim}{L}/\partial\overline{u} = \overline{\overline{I}} * \overline{v} \\ \text{og} \quad &\partial\underset{\sim}{L}/\partial\overline{v} = \overline{b}^k \overline{u} * \overline{b}_k \end{aligned} \tag{26.48}$$

Er specielt $*$ en prik, bliver

$$\begin{aligned} \partial\underset{\sim}{L}/\partial\overline{u} &= \overline{v} \\ \partial\underset{\sim}{L}/\partial\overline{v} &= \overline{u} \end{aligned} \tag{26.49}$$

og er yderligere $\overline{u} = \overline{v}$, bliver differentialtensoren

$$D\underset{\sim}{L}(\overline{v}) = D(v^2) = 2\overline{v} \tag{26.50}$$

26.3 Funktioner af andenordens tensorer

Lad først

$$\overline{\overline{L}} = \underset{\sim}{L}(\overline{\overline{M}}) = \overline{\overline{M}} \tag{26.51}$$

og

$$d\overline{\overline{M}} = dM^{kl}\overline{b}_k\overline{b}_l \tag{26.52}$$

Hermed bliver

$$\underset{\sim}{L}'_{kl} = d\underset{\sim}{L}/dM^{kl} = \overline{b}_k\overline{b}_l \tag{26.53}$$

og

$$D\underset{\sim}{L} = \overline{b}^k\overline{b}^l\overline{b}_k\overline{b}_l \tag{26.54}$$

Skriver man derimod

$$d\overline{\overline{M}} = dM_{kl}\overline{b}^k\overline{b}^l \tag{26.55}$$

bliver

$$\underset{\sim}{L}'^{kl} = \partial\underset{\sim}{L}/\partial M_{kl} = \overline{b}^k\overline{b}^l \tag{26.56}$$

og

$$D\underset{\sim}{L} = \overline{b}_k\overline{b}_l\overline{b}^k\overline{b}^l \tag{26.57}$$

Tilsvarende finder man med

$$d\overline{\overline{M}} = dM_l^k\overline{b}_k\overline{b}^l \tag{26.58}$$

at differentialtensoren bliver

$$D\underset{\sim}{L} = \overline{b}^k\overline{b}_l\overline{b}_k\overline{b}^l \tag{26.59}$$

og med

$$d\overline{\overline{M}} = dM_l^k\overline{b}^l\overline{b}_k \tag{26.60}$$

bliver differentialtensoren

$$D\underset{\sim}{L} = \overline{b}_l \overline{b}^k \overline{b}^l \overline{b}_k \tag{26.61}$$

De fire tensorer repræsenterer alle identitetstensoren af fjerde orden

$$\overline{\overline{\overline{\overline{J}}}} = \overline{b}^k \overline{b}^l \overline{b}_k \overline{b}_l = \overline{b}_k \overline{b}_l \overline{b}^k \overline{b}^l = \overline{b}^k \overline{b}_l \overline{b}_k \overline{b}^l = \overline{b}_k \overline{b}^l \overline{b}^k \overline{b}_l \tag{26.62}$$

I de fire tilfælde har man med notationen indført ved (26.19) og (26.22)

$$\underset{\sim}{J} = \overline{\overline{B}}^{kl} \overline{\overline{B}}_{kl} = \overline{\overline{B}}_{kl} \overline{\overline{B}}^{kl} = \overline{\overline{B}}^k{}_l \overline{\overline{B}}_k{}^l = \overline{\overline{B}}_k{}^l \overline{\overline{B}}^k{}_l \tag{26.63}$$

hvor man især i de to sidste udtryk skal være meget omhyggelig med placeringen af indekserne.

Denne tensor har den egenskab, at

$$\underset{\sim}{J} : \underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L} : \underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{L} \tag{26.64}$$

når $\underset{\sim}{L}$ er en tensor, hvis orden er højere end eller lig med 2.

Tensoren

$$\underset{\sim}{T} = \overline{b}^l \overline{b}_k \overline{b}^k \overline{b}_l \tag{26.65}$$

for eksempel, er derimod ikke nogen identitetstensor, da man blandt andet har $\underset{\sim}{T} : \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{M}} : \underset{\sim}{T} = \overline{\overline{M}}^T$ og $\underset{\sim}{T}$ kaldes derfor transponeringstensoren. Andre repræsentationer af transponeringstensoren end $\overline{b}^l \overline{b}_k \overline{b}^k \overline{b}_l = \overline{\overline{B}}^l{}_k \overline{\overline{B}}^k{}_l$ er

$$\underset{\sim}{T} = \overline{b}^k \overline{b}^l \overline{b}_l \overline{b}_k = \overline{b}_k \overline{b}_l \overline{b}^l \overline{b}^k = \overline{b}_k \overline{b}^l \overline{b}_l \overline{b}^k = \underset{\sim}{B}^{kl} \underset{\sim}{B}_{lk} = \underset{\sim}{B}_{kl} \underset{\sim}{B}^{lk} = \overline{\overline{B}}_k{}^l \overline{\overline{B}}_l{}^k \tag{26.66}$$

Herefter betragtes

$$\underset{\sim}{L}(\overline{\overline{M}}) = \overline{\overline{M}} * \underset{\sim}{U} \tag{26.67}$$

hvor $\underset{\sim}{U}$ er en konstant tensor. Med $d\overline{\overline{M}} = dM^{kl} \overline{b}_k \overline{b}_l = dM^{kl} \overline{\overline{B}}_{kl}$ bliver

$$\underset{\sim}{L}'_{kl} = \overline{b}_k \overline{b}_l * \underset{\sim}{U} \tag{26.68}$$

og dermed

$$D\underset{\sim}{L} = \bar{b}^k \bar{b}^l \bar{b}_k \bar{b}_l * \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{J} * \underset{\sim}{U} = \overline{\overline{B}}^{kl} \overline{\overline{B}}_{kl} * \underset{\sim}{U} \tag{26.69}$$

Er derimod

$$\underset{\sim}{L}(\overline{\overline{M}}) = \underset{\sim}{U} * \overline{\overline{M}} \tag{26.78}$$

bliver

$$\underset{\sim}{L}'_{kl} = \underset{\sim}{U} * \bar{b}_k \bar{b}_l \tag{26.71}$$

og derfor

$$D\underset{\sim}{L} = \bar{b}^k \bar{b}^l \underset{\sim}{U} * \bar{b}_k \bar{b} l = \overline{\overline{B}}^{kl} \underset{\sim}{U} * \overline{\overline{B}}_{kl} \tag{26.72}$$

Samme differentialtensor fås i de to tilfælde, når * er et dobbelt prikprodukt, og $\underset{\sim}{U}$ er en andenordens tensor som $\overline{\overline{M}}$. Har man

$$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{U} * \overline{\overline{M}} \,\Box\, \underset{\sim}{V} \tag{26.73}$$

hvor både $\underset{\sim}{U}$ og $\underset{\sim}{V}$ er konstante tensorer og såvel * som $\Box$ er tilladelige produkter, bliver

$$D\underset{\sim}{L} = \overline{\overline{B}}^{kl} \underset{\sim}{U} * \overline{\overline{B}}_{kl} \,\Box\, \underset{\sim}{V} \tag{26.74}$$

Når $\underset{\sim}{L}$ er en funktion af de to tensorargumenter $\overline{\overline{M}}$ og $\overline{\overline{N}}$

$$\underset{\sim}{L}(\overline{\overline{M}}, \overline{\overline{N}}) = \overline{\overline{M}} * \overline{\overline{N}} \tag{26.75}$$

har man

$$\begin{aligned} \partial\underset{\sim}{L}/\partial\overline{\overline{M}} &= \underset{\sim}{J} * \overline{\overline{N}} = \overline{\overline{B}}^{kl} \overline{\overline{B}}_{kl} * \overline{\overline{N}} \\ \partial\underset{\sim}{L}/\partial\overline{\overline{N}} &= \bar{b}^k \bar{b}^l \overline{\overline{M}} * \bar{b}_k \bar{b}_l = \overline{\overline{B}}^{kl} \overline{\overline{M}} * \overline{\overline{B}}_{kl} \end{aligned} \tag{26.76}$$

Er * et dobbelt prikprodukt, bliver

$$\begin{aligned} \partial\underset{\sim}{L}/\partial\overline{\overline{M}} &= \overline{\overline{N}} \\ \partial\underset{\sim}{L}/\partial\overline{\overline{N}} &= \overline{\overline{M}} \end{aligned} \tag{26.77}$$

og med $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, bliver

$$D\underset{\sim}{L} = D(\overline{\overline{M}} : \overline{\overline{M}}) = 2\overline{\overline{M}} \tag{26.78}$$

Er * blot et enkelt prikprodukt, har man

$$D(\overline{\overline{M}} \cdot \overline{\overline{M}}) = D(\overline{\overline{M}}^2) = \overline{\overline{B}}^{kl}\overline{\overline{B}}_{kl} \cdot \overline{\overline{M}} + \overline{\overline{B}}^{kl}\overline{\overline{M}} \cdot \overline{\overline{B}}_{kl} = \overline{\overline{B}}^{kl}\left(\overline{\overline{B}}_{kl} \cdot \overline{\overline{M}} + \overline{\overline{M}} \cdot \overline{\overline{B}}_{kl}\right) \tag{26.79}$$

Første hovedinvariant hørende til potenserne af $\underset{\sim}{M}$ er

$$\begin{aligned} I_{\underset{\sim}{M}} &= \overline{\overline{I}} : \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{I}} : \overline{\overline{M}}^T \\ I_{\underset{\sim}{M}^2} &= \overline{\overline{I}} : \overline{\overline{M}}^2 = \overline{\overline{M}} : \overline{\overline{M}}^T \\ I_{\underset{\sim}{M}^3} &= \overline{\overline{I}} : \overline{\overline{M}}^3 = \overline{\overline{M}}^2 : \overline{\overline{M}}^T \\ & \\ I_{\underset{\sim}{M}^n} &= \overline{\overline{I}} : \overline{\overline{M}}^n = \overline{\overline{M}}^{n-1} : \overline{\overline{M}}^T \end{aligned} \tag{26.80}$$

og med

$$d\overline{\overline{M}}^T / d\overline{\overline{M}} = \underset{\sim}{T} \tag{26.81}$$

finder man

$$\begin{aligned} dI_{\underset{\sim}{M}} / d\overline{\overline{M}} &= \overline{\overline{I}} = (\overline{\overline{M}}^T)^0 \\ dI_{\underset{\sim}{M}^2} / d\overline{\overline{M}} &= 2\overline{\overline{M}}^T \\ dI_{\underset{\sim}{M}^3} / d\overline{\overline{M}} &= 3(\overline{\overline{M}}^T)^2 = 3(\overline{\overline{M}}^2)^T \end{aligned} \tag{26.82}$$

I henhold til afsnit 6.8 kan en tensor af 2. orden skrives

$$\overline{\overline{M}} = M_1\hat{e}_1\overline{e}^1 + M_2\hat{e}_2\overline{e}^2 + M_3\hat{e}_3\overline{e}^3 \tag{26.83}$$

hvor M_k er tensorens egenværdier, $\hat{e}_k$ og $\overline{e}^k$ de eventuelt komplekse egenvektorer og de dertil hørende reciprokke vektorer. Med denne skrivemåde har man

$$\overline{\overline{M}}^n = M_1^n\hat{e}_1\overline{e}^1 + M_2^n\hat{e}_2\overline{e}^2 + M_3^n\hat{e}_3\overline{e}^3 \tag{26.84}$$

med første hovedinvariant

$$I_{\underset{\sim}{M}^n} = M_1^n + M_2^n + M_3^n \tag{26.85}$$

Idet hovedinvarianterne hørende til $\overline{\overline{M}}$ er

$$\begin{aligned} I_{\underset{\sim}{M}} &= M_1 + M_2 + M_3 \\ II_{\underset{\sim}{M}} &= M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_3 M_1 \\ III_{\underset{\sim}{M}} &= M_1 M_2 M_3 \end{aligned} \tag{26.86}$$

jævnfør (6.19) finder man

$$\begin{aligned} 2II_{\underset{\sim}{M}} &= I_{\underset{\sim}{M}}^2 - I_{\underset{\sim}{M}^2} \\ 6III_{\underset{\sim}{M}} &= I_{\underset{\sim}{M}}^3 - 3I_{\underset{\sim}{M}} I_{\underset{\sim}{M}^2} + 2I_{\underset{\sim}{M}^3} \end{aligned} \tag{26.87}$$

og de omvendte

$$\begin{aligned} I_{\underset{\sim}{M}^2} &= I_{\underset{\sim}{M}}^2 - 2II_{\underset{\sim}{M}} \\ I_{\underset{\sim}{M}^3} &= I_{\underset{\sim}{M}}^3 - 3I_{\underset{\sim}{M}} II_{\underset{\sim}{M}} + 3III_{\underset{\sim}{M}} \end{aligned} \tag{26.88}$$

Af disse udtryk finder man

$$\begin{aligned} dI_{\underset{\sim}{M}}/d\overline{\overline{M}} &= \overline{\overline{I}} \\ dII_{\underset{\sim}{M}}/d\overline{\overline{M}} &= I_{\underset{\sim}{M}} \overline{\overline{I}} - \overline{\overline{M}}^T \\ dIII_{\underset{\sim}{M}}/d\overline{\overline{M}} &= II_{\underset{\sim}{M}} \overline{\overline{I}} - I_{\underset{\sim}{M}} \overline{\overline{M}}^T + (\overline{\overline{M}}^T)^2 \end{aligned} \tag{26.89}$$

Da en tensor $\overline{\overline{M}}$ og dens transponerede $\overline{\overline{M}}^T$ har samme egenværdier og dermed samme hovedinvarianter, se afsnit 6.1, medfører Cayley-Hamiltons sætning (6.100)

$$III_{\underset{\sim}{M}} \overline{\overline{I}} = II_{\underset{\sim}{M}} \overline{\overline{M}}^T - I_{\underset{\sim}{M}} (\overline{\overline{M}}^T)^2 + (\overline{\overline{M}}^T)^3 = \overline{\overline{M}}^T \cdot dIII_{\underset{\sim}{M}}/d\overline{\overline{M}} \tag{26.90}$$

eller, for komplette tensorer

$$dIII_{\underset{\sim}{M}}/d\overline{\overline{M}} = III_{\underset{\sim}{M}} \overline{\overline{M}}^{-T} \tag{26.91}$$

Øvelse 26.1

$\utilde{A} = \utilde{I} \times \hat{a}$, vis at $d\utilde{A}/d\hat{a} = -\utilde{E}$

Øvelse 26.2

φ er en skalær funktion af $\overline{\overline{D}}$ givet i venstre kolonne. Vis, at $d\varphi/d\overline{\overline{D}}$ er som angivet i højre kolonne. $\utilde{U}$ og $\utilde{V}$ er konstante tensorer af henholdsvis anden og fjerde orden.

$\varphi(\overline{\overline{D}})$	$D\varphi = d\varphi/d\overline{\overline{D}}$
$\utilde{D} : \utilde{D} = \utilde{D}^T : \utilde{D}^T = \utilde{I} : \utilde{D} \cdot \utilde{D}^T$	$2\utilde{D}$
$\utilde{I} : \utilde{D}^n = \utilde{D}^{n-1} : \utilde{D}^T$	$n(\utilde{D}^{n-1})^T = n(\utilde{D}^T)^{n-1}$
$\utilde{D} : \utilde{U} = \utilde{U} : \utilde{D}$	$\utilde{U}$
$\left.\begin{array}{l} \utilde{D}^T : \utilde{U} = \utilde{U} : D^T = \\ \utilde{D} : \utilde{U}^T = \utilde{U}^T : \utilde{D} \end{array}\right\}$	$\utilde{U}^T$
$\utilde{D}^2 : \utilde{U} = \utilde{U} : \utilde{D}^2$	$\utilde{U} \cdot \utilde{D}^T + \utilde{D}^T \cdot \utilde{U}$
$\utilde{D}^3 : \utilde{U} = \utilde{U} : \utilde{D}^3$	$\utilde{U} \cdot (\utilde{D}^T)^2 + \utilde{D}^T \cdot \utilde{U} \cdot \utilde{D}^T + (D^T)^2 \cdot \utilde{U}$
$\utilde{D} : \utilde{D}^T = \utilde{D}^T : \utilde{D} = \utilde{I} : \utilde{D}^2$	$2\utilde{D}^T$
$II_D + \frac{1}{2} I_{D^2}$	$\utilde{D} : \utilde{I}\utilde{I}$
$\utilde{D} : \utilde{V} : \utilde{D}$	$\utilde{B}^{kl}\left(\utilde{B}_{kl} : \utilde{V} : \utilde{D} + \utilde{D} : \utilde{V} : \utilde{B}_{kl}\right)$
I_D	$\utilde{I}$
II_D	$I_D\utilde{I} - \utilde{D}^T$
III_D	$II_D\utilde{I} - I_D\utilde{D}^T + (\utilde{D}^T)^2 = III_D\utilde{D}^{-T}$
$\hat{a}\hat{a} : \utilde{D} \cdot \utilde{D}^T$	$\utilde{B}^{kl}\left(\utilde{B}_{kl} \cdot \utilde{D}^T + \utilde{D} \cdot \utilde{B}_{lk}\right) : \hat{a}\hat{a}$

Øvelse 26.3

$\overline{\overline{B}}$ er en andenordens tensorfunktion af $\overline{\overline{D}}$ givet i venstre kolonne. Vis, at $d\overline{\overline{B}}/d\overline{\overline{D}}$ er som angivet i højre kolonne.

$\overline{\overline{B}}(\overline{\overline{D}})$	$D\overline{\overline{B}} = d\overline{\overline{B}}/d\overline{\overline{D}}$
$\overline{\overline{D}}$	$\underset{\sim}{J}$
$\overline{\overline{D}}^T$	$\underset{\sim}{T}$
$\underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}^2$	$\underset{\sim}{B}^{kl}\left(\underset{\sim}{B}_{kl} \cdot \underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{B}_{kl}\right)$
$\underset{\sim}{D}^3$	$\underset{\sim}{B}_{kl}\left(\underset{\sim}{B}_{kl} \cdot \underset{\sim}{D}^2 + \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{B}_{kl} \cdot \underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{D}^2 \cdot \underset{\sim}{B}_{kl}\right)$
$\underset{\sim}{D}^{-1}$	$-\underset{\sim}{B}^{kl}\underset{\sim}{D}^{-1} \cdot \underset{\sim}{B}_{kl} \cdot \underset{\sim}{D}^{-1}$
$I_D \underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{D} : \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I}$	$\underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I}$
$\underset{\sim}{D}^T \cdot \underset{\sim}{D}^T = (\underset{\sim}{D}^T)^2$	$\underset{\sim}{B}^{kl}\left(\underset{\sim}{B}_{lk} \cdot \underset{\sim}{D}^T + \underset{\sim}{D}^T \cdot \underset{\sim}{B}_{lk}\right)$
$\underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{D}^T$	$\underset{\sim}{B}^{kl}\left(\underset{\sim}{B}_{kl} \cdot \underset{\sim}{D}^T + \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{B}_{lk}\right)$
$\underset{\sim}{D}^T \cdot \underset{\sim}{D}$	$\underset{\sim}{B}^{kl}\left(\underset{\sim}{B}_{lk} \cdot \underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{D}^T \cdot \underset{\sim}{B}_{kl}\right)$

Øvelse 26.4

$\underset{\sim}{L}$ er en l'te ordens tensorfunktion af $\overline{\overline{D}}$ givet i venstre kolonne. Vis, at $d\underset{\sim}{L}/d\overline{\overline{D}}$ er som angivet i højre kolonne. $\underset{\sim}{U}$ er en konstant tensor af p'te orden.

$\underset{\sim}{L}(\overline{\overline{D}})$	$D\underset{\sim}{L} = d\underset{\sim}{L}/d\overline{\overline{D}}$
$\underset{\sim}{D} * \underset{\sim}{U}$	$\underset{\sim}{J} * \underset{\sim}{U}$
$\underset{\sim}{U} * \underset{\sim}{D}$	$\underset{\sim}{B}^{kl}\underset{\sim}{U} * \underset{\sim}{B}_{kl}$
$\underset{\sim}{U} * \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{D}$	$\underset{\sim}{B}^{kl}\underset{\sim}{U} * \left(\underset{\sim}{B}_{kl} \cdot \underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{B}_{kl}\right)$
$\underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{D} * \underset{\sim}{U}$	$\underset{\sim}{B}_{kl}\left(\underset{\sim}{B}_{kl} \cdot \underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{B}_{kl}\right) * \underset{\sim}{U}$

27. SYMMETRIDREJNINGER AF TENSORER

Tensorbegrebet er baseret på vektorbegrebet, og da en vektor kan drejes, dvs. skifte retning, kan man definere en drejet tensor, som den tensor der fremkommer, når samtlige vektorer som indgår i tensorprodukterne udsættes for samme drejning. Når en vektor drejes, fremkommer sædvanligvis en ny vektor, men for tensorer af højere orden kan det forekomme, at den drejede tensor er identisk med den oprindelige. Som et eksempel betragtes tensoren $\overline{b}\overline{c}$ som ved en drejning på 180° om $\hat{a} = \overline{b}\times\overline{c}/a$ føres over i $(-\overline{b})(-\overline{c}) = \overline{b}\overline{c}$. En sådan drejning kaldes en *symmetridrejning*.

Ved hjælp af en ortogonal tensor $\overline{\overline{R}}$, en drejnings- eller rotationstensor, kan en vektor $\overline{v}$ drejes over i en vektor $\overline{v}^R$ bestemt ved

$$\overline{v}^R = \underset{\sim}{R} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \underset{\sim}{R}^T \tag{27.1}$$

Tilsvarende kan en tensor $\underset{\sim}{U} = \overline{c}^k\overline{d}_l \cdots \overline{e}_k\overline{f}^l$ af vilkårlig højere orden drejes over i $\underset{\sim}{U}^R$ bestemt ved

$$\underset{\sim}{U}^R = \underset{\sim}{R} \cdot \overline{c}^k R \cdot \overline{d}_l \cdots R \cdot \overline{e}_k R \cdot \overline{f}^l \tag{27.2}$$

Når den drejede tensor er identisk med den oprindelige, siges *symmetribetingelsen*

$$\underset{\sim}{U}^R = \underset{\sim}{U} \tag{27.3}$$

at være opfyldt, $\underset{\sim}{R}$ er en *symmetridrejning* for tensoren $\underset{\sim}{U}$, som er en *anisotrop* tensor. Drejningen $\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{I}}$, som er en drejning 2π om en vilkårlig akse, er en symmetridrejning for enhver tensor.

27.1 Kontinuerte symmetridrejninger

Når en vilkårlig drejning χ om en akse $\hat{a}$ er en symmetridrejning for en tensor $\underset{\sim}{U}$, kaldes tensoren *transvers isotrop* med hensyn til den pågældende akse. Betingelsen for transvers isotropi kan skrives

$$d\underset{\sim}{U}^R/d\chi = \underset{\sim}{0} \tag{27.4}$$

Er enhver drejning om enhver akse en symmetridrejning, kaldes tensoren *isotrop*.

27.1.1 Vektorer

For en vektor $\overline{v}$ er symmetribetingelsen

$$\overline{v}^R = \underset{\sim}{R} \cdot \overline{v} = \overline{v} \tag{27.5}$$

og betingelsen for transvers isotropi med hensyn til $\hat{a}$ er derfor

$$d\overline{v}^R/d\chi = (d\underset{\sim}{R}/d\chi)\cdot\overline{v} = \underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{R}\cdot v = \underset{\sim}{A}\cdot\overline{v} = \overline{0} \tag{27.6}$$

Da $\underset{\sim}{A} = \hat{a}\times\underset{\sim}{I}$ og dermed $\underset{\sim}{A}\cdot\overline{v} = \hat{a}\times\overline{v}$ er (27.6) opfyldt for

$$\overline{v} = \alpha\hat{a} \tag{27.7}$$

hvor α er en skalar, som ikke afhænger af drejningsvinklen x. Det fremgår, at den eneste isotrope vektor er nulvektoren $\overline{0}$.

27.1.2 Tensorer af anden orden

Symmetribetingelsen for en andenordens tensor $\underset{\sim}{H} = \overline{u}^k\overline{v}_k$er

$$\underset{\sim}{H}^R = \underset{\sim}{R}\cdot\overline{u}^k\underset{\sim}{R}\cdot\overline{v}_k = \underset{\sim}{R}\cdot\overline{u}^k\overline{v}_k\cdot\underset{\sim}{R}^T = \underset{\sim}{R}\cdot\underset{\sim}{H}\cdot\underset{\sim}{R}^T = \underset{\sim}{H} \tag{27.8}$$

og betingelsen for transvers isotropi bliver

$$d\underset{\sim}{H}^R/d\chi = \underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{R}\cdot\underset{\sim}{H}\cdot\underset{\sim}{R}^T + \underset{\sim}{R}\cdot\underset{\sim}{H}\cdot\underset{\sim}{R}^T\cdot\underset{\sim}{A}^T = A\cdot H - H\cdot A = \underset{\sim}{0} \tag{27.9}$$

Betingelsen (27.9) er opfyldt for

$$\underset{\sim}{H} = \beta_n\underset{\sim}{A}^n \tag{27.10}$$

hvor n er såvel en heltallig eksponent som et summationsindeks og β_n er skalarer, som ikke afhænger af χ. Cayley-Hamiltons sætning medfører, at det ikke er nødvendigt at medtage flere eksponenter end 0, 1 og 2, og den fuldstændige løsning bliver

$$\underset{\sim}{H} = \beta_0\underset{\sim}{I} + \beta_1\underset{\sim}{A} + \beta_2\underset{\sim}{A}^2 \tag{27.11}$$

Det ses, at den eneste isotrope tensor af anden orden er

$$\underset{\sim}{H} = \beta_0\underset{\sim}{I} \tag{27.12}$$

en skalar gange identitetstensoren.

Da man har relationen $\underset{\sim}{A}^2 = \hat{a}\hat{a} - \underset{\sim}{I}$ kan en transvers isotrop tensor lige så godt udtrykkes som

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{H} = \psi_0\underset{\sim}{I} + \psi_1\underset{\sim}{A} + \psi_2\hat{a}\hat{a} \\ \text{eller}\quad &\underset{\sim}{H} = \omega_0\hat{a}\hat{a} + \omega_1\underset{\sim}{A} + \omega_2\underset{\sim}{A}^2 \end{aligned} \tag{27.13}$$

Tensorerne $\underset{\sim}{I}$, $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{A}^2$ og $\hat{a}\hat{a}$ kaldes *frembringertensorer*.

27.1.3 Tensorer af højere orden

Når der er tale om tensorer af højere orden end to, må man skelne mellem tensorer af ulige orden og tensorer af lige orden. I en tensor af ulige orden forekommer der led af typen $c^k \cdots \overline{d}_l \overline{e}_k \cdots \overline{f}^l \cdots$ hvor c^k er skalarer, mens $\overline{d}_l, \overline{e}_k$ og $\overline{f}^l$ er vektorer. Det anførte led indgår i den drejede tensor som $c^k \cdots \underset{\sim}{R} \cdot \overline{d}_l \underset{\sim}{R} \cdot \overline{e}_k \cdots \underset{\sim}{R} \cdot \overline{f}^l \cdots$ der igen indgår i symmetrirelationen for transvers isotropi $d\underset{\sim}{U}^R / d\chi = \underset{\sim}{0}$ med summen $c^k (\cdots \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{R} \cdot \overline{d}_l \underset{\sim}{R} \cdot \overline{e} \cdots \underset{\sim}{R} \cdot \overline{f}^l \cdots + \cdots \underset{\sim}{R} \cdot \overline{d}_l \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{R} \cdot \overline{e}_k \cdots \underset{\sim}{R} \cdot \overline{f}^l \cdots + - \cdots \underset{\sim}{R} \cdot \overline{d}_l \underset{\sim}{R} \cdot \overline{e}_k \cdots \overline{f}^l \cdot \underset{\sim}{R}^T \cdot \underset{\sim}{A} \cdots)$.

Sættes tensoren $\overline{d}_l \overline{f}^l$ og dermed $\underset{\sim}{R} \cdot \overline{d}_l \overline{f}^l \cdot \underset{\sim}{R}^T$ lig $\beta_n \underset{\sim}{A}^n$, vil det første og det sidst anførte led i parentesen tilsammen give nul og med $c^k \overline{e}_k = \hat{a}$ er også $c^k \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{R} \cdot \overline{e}_k$ lig nul, og symmetribetingelsen er opfyldt.

I en tensor af lige orden forekommer ingen vektorer $c^k \overline{e}_k$, kun tensorer $\overline{d}_l \overline{f}^l$ som skal sættes lig $\underset{\sim}{A}^n$, når symmetribetingelsen skal tilfredsstilles.

27.1.4 Tensorer af fjerde orden

En tensor af fjerde orden kan skrives som enten $\overline{c}^k \overline{d}_k \overline{e}^l \overline{f}_l$, $\overline{c}^k \overline{e}^l \overline{d}_k \overline{f}_l$ eller $\overline{c}^k \overline{e}^l \overline{f}_l \overline{d}_k$. I disse udtryk skal andenordens tensorerne $\overline{c}^k \overline{d}_k$ og $\overline{e}^l \overline{f}_l$ sættes lig med $\overline{\overline{A}}^n$, $n = 0, 1$ og 2.

Når man i en tensor af n'te orden $\overline{c}\overline{d}\overline{e}\overline{f} \cdots$ skal have byttet om på rækkefølgen af nogle vektorer, benytter man hertil en tensor af orden $2n$, jf. transponeringstensoren $\underset{\sim}{T}$ i (26.65). Således bliver f.eks. $\overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} \circ \overline{b}_k \overline{b}_l \overline{b}_m \overline{b}_n \overline{b}^m \overline{b}^n \overline{b}^l \overline{b}^k = \overline{c}\overline{d}\overline{b}\overline{a}$. En identitetstensor af orden $2n$ er $\underset{\sim}{J} = \overline{b}_k \overline{b}_l \overline{b}_m \cdots \overline{b}_n \overline{b}^k \overline{b}^l \overline{b}^m \cdots \overline{b}^n$ og med $klm \cdots n$ i en anden rækkefølge i den ene halvdel af tensoren er der tale om en transponeringstensor.

Da vektorerne $\overline{c}^k$ og $\overline{d}_k$ og tilsvarende $\overline{e}^l$ og $\overline{f}_l$, ikke står umiddelbart ved siden af hinanden i alle tre udtryk og derfor ikke uden videre kan identificeres med $\underset{\sim}{A}^n$, må disse tensorer udtrykkes på anden måde. Med $\hat{k}$ som omdrejningsakse, $\hat{\imath}$ og $\hat{\jmath}$ vinkelrette på $\hat{k}$ og på hinanden bliver

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{I}} &= \hat{\imath}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\hat{\jmath} + \hat{k}\hat{k} \\
\overline{\overline{A}} &= \hat{k} \times \underset{\sim}{I} = \hat{\jmath}\hat{\imath} - \hat{\imath}\hat{\jmath} \\
\overline{\overline{A}}^2 &= \hat{k}\hat{k} - \underset{\sim}{I} = -(\hat{\imath}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\hat{\jmath})
\end{aligned}
\tag{27.14}
$$

En tensor af fjerde orden, som er transvers isotrop om $\hat{k}$-aksen, kan nu udtrykkes som

$$
\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} = \eta_\gamma \overline{\overline{\overline{\overline{G}}}}^\gamma; \; \gamma = 1, 2 \cdots 19 \tag{27.15}
$$

hvor γ ikke er en eksponent, blot et summationsindeks. Ligesom det er tilfældet med tensorer af anden orden, kan man heller ikke her entydigt angive kun et sæt frembringertensorer. Et brugbart sæt er

$$\underset{\sim}{G}^1 = \underset{\sim}{I}\,\underset{\sim}{I} = \hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\imath} + \hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{\jmath} + \hat{k}\hat{k}\hat{k}\hat{k} + \hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{\imath}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{\jmath} + \hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{k}\hat{k} + \hat{k}\hat{k}\hat{\imath}\hat{\imath} + \hat{k}\hat{k}\hat{\jmath}\hat{\jmath} + \hat{k}\hat{k}\hat{k}\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{G}^2 = \underset{\sim}{J} = \hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\imath} + \hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{\imath}\hat{\jmath} + \hat{\imath}\hat{k}\hat{\imath}\hat{k} + \hat{\jmath}\hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{\jmath} + \hat{\jmath}\hat{k}\hat{\jmath}\hat{k} + \hat{k}\hat{\imath}\hat{k}\hat{\imath} + \hat{k}\hat{\jmath}\hat{k}\hat{\jmath} + \hat{k}\hat{k}\hat{k}\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{G}^3 = \underset{\sim}{T} = \hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\imath} + \hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{\imath} + \hat{\imath}\hat{k}\hat{k}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\jmath} + \hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{\jmath} + \hat{\jmath}\hat{k}\hat{k}\hat{\jmath} + \hat{k}\hat{\imath}\hat{\imath}\hat{k} + \hat{k}\hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{k} + \hat{k}\hat{k}\hat{k}\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{G}^4 = \hat{k}\hat{k}\hat{k}\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{G}^5 = \hat{k}\hat{k}\hat{\imath}\hat{\imath} + \hat{k}\hat{k}\hat{\jmath}\hat{\jmath}$$

$$\underset{\sim}{G}^6 = \hat{k}\hat{\imath}\hat{k}\hat{\imath} + \hat{k}\hat{\jmath}\hat{k}\hat{\jmath}$$

$$\underset{\sim}{G}^7 = \hat{k}\hat{\imath}\hat{\imath}\hat{k} + \hat{k}\hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{G}^8 = \hat{\imath}\hat{\imath}\hat{k}\hat{k} + \hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{k}\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{G}^9 = \hat{\imath}\hat{k}\hat{\imath}\hat{k} + \hat{\jmath}\hat{k}\hat{\jmath}\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{G}^{10} = \hat{\imath}\hat{k}\hat{k}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\hat{k}\hat{k}\hat{\jmath} \tag{27.16}$$

$$\underset{\sim}{G}^{11} = \hat{k}\hat{k}\hat{\jmath}\hat{\imath} - \hat{k}\hat{k}\hat{\imath}\hat{\jmath}$$

$$\underset{\sim}{G}^{12} = \hat{k}\hat{\jmath}\hat{k}\hat{\imath} - \hat{k}\hat{\imath}\hat{k}\hat{\jmath}$$

$$\underset{\sim}{G}^{13} = \hat{k}\hat{\jmath}\hat{\imath}\hat{k} - \hat{k}\hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{G}^{14} = \hat{\jmath}\hat{\imath}\hat{k}\hat{k} - \hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{k}\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{G}^{15} = \hat{\jmath}\hat{k}\hat{\imath}\hat{k} - \hat{\imath}\hat{k}\hat{\jmath}\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{G}^{16} = \hat{\jmath}\hat{k}\hat{k}\hat{\imath} - \hat{\imath}\hat{k}\hat{k}\hat{\jmath}$$

$$\underset{\sim}{G}^{17} = \hat{\jmath}\hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\imath} - \hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{\imath}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{\jmath} - \hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{\jmath}$$

$$\underset{\sim}{G}^{18} = \hat{\jmath}\hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\imath} - \hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{\imath}\hat{\jmath} - \hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{\jmath}$$

$$\underset{\sim}{G}^{19} = \hat{\jmath}\hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\imath} - \hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\jmath} + \hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{\imath} - \hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{\jmath}\hat{\jmath}$$

Kun de første tre frembringertensorer er uafhængige af, at det er $\hat{k}$-aksen som er omdrejningsakse, og en isotrop tensor af fjerde orden kan derfor skrives

$$\underset{\sim}{C} = \eta_1 \underset{\sim}{I}\,\underset{\sim}{I} + \eta_2 \underset{\sim}{J} + \eta_3 \underset{\sim}{T} \tag{27.17}$$

hvor $\underset{\sim}{I}$ er identitetstensoren af anden orden, mens $\underset{\sim}{J}$ og $\underset{\sim}{T}$ er de i afsnit 26.3 indførte fjerdeordens tensorer: identitetstensoren $\underset{\sim}{J}$ og transponeringstensoren $\underset{\sim}{T}$.

27.2 Diskrete symmetridrejninger

Symmetridrejninger med kontinuert drejningsvinkel χ er ikke den eneste mulighed, også diskrete værdier af χ forekommer. Da en tensor efter n på hinanden følgende drejninger skal vende tilbage til den oprindelige orientering har man, at $n\chi = 2\pi$, dvs.

$$\chi = 2\pi/n \quad , \quad n = 2, 3 \cdots \tag{27.18}$$

En akse, til hvilken der svarer en drejningsvinkel $2\pi/n$, betegnes en *n-fold symmetriakse*. Symmetribetingelsen (27.3) $\underset{\sim}{U}^R = \underset{\sim}{U}$ skal derfor opstilles for $n = 2, 3, 4\cdots$, tilsyneladende en uoverkommelig opgave. Det kan imidlertid vises, at det for en tensor af p'te orden gælder, at symmetribetingelsen er opfyldt for $n > p$, når symmetribetingelsen for transvers isotropi om den pågældende akse er opfyldt.

I henhold til afsnit 6.6 kan drejningstensoren $\underset{\sim}{R}$ skrives

$$\underset{\sim}{R} = \exp(i\chi)\hat{e}_1\hat{e}^1 + \exp(-i\chi)\hat{e}_2\hat{e}^2 + \hat{e}_3\hat{e}^3 = \lambda_k\hat{e}_k\hat{e}^k = \lambda^k\hat{e}^k\hat{e}_k \tag{27.19}$$

hvor $\hat{e}_3 = \hat{e}^3 = \hat{k} =$ omdrejningsaksen,

$\hat{e}_1 = \hat{e}^2 = (\hat{\imath} - i\hat{\jmath})/\sqrt{2}$ og $\hat{e}_2 = \hat{e}^1 = (\hat{\imath} + i\hat{\jmath})/\sqrt{2}$ er rotationstensorens komplekse egenvektorer,

λ_k og λ^k er egenværdierne, $\lambda_1 = \lambda^2 = \exp(i\chi)$, $\lambda_2 = \lambda^1 = \exp(-i\chi)$ og $\lambda_3 = \lambda^3 = 1$.

En vilkårlig tensor af p'te orden kan skrives

$$\underset{\sim}{U} = U^{klm\cdots}\hat{e}_k\hat{e}_l\hat{e}_m\cdots \tag{27.20}$$

og den drejede tensor bliver

$$\underset{\sim}{U}^R = \exp(iq\chi)u^{klm\cdots}\hat{e}_k\hat{e}_l\hat{e}_m\cdots \tag{27.21}$$

hvor det for hvert enkelt led gælder, at

$$-p \leq q \leq p \tag{27.22}$$

Skal der være tale om en symmetridrejning må for det enkelte led enten $\exp(iq\chi)$ have værdien 1 eller $U^{klm\cdots}$ have værdien nul. Eksponentialfunktionen $\exp(iq\chi)$ har værdien 1 for

$$q\chi = m2\pi \quad , \quad m = 0, 1, 2\cdots \tag{27.23}$$

og med $\chi = 2\pi/n$ for en n-fold symmetriakse, skal altså

$$q/n = m \tag{27.24}$$

Med $m = 0, 1, 2 \cdots$ kan (27.24) ikke opfyldes, når p og dermed q er mindre end n og koefficienterne $\exp(iq\chi)$ vil være forskellige fra 1 for $n > p$.

27.2.1 Tensorer af anden orden

En 2-fold drejning om en akse $\hat{a}$ beskrives ved

$$R = \hat{a}\hat{a} + \underset{\sim}{A}^2 = 2\hat{a}\hat{a} - \underset{\sim}{I} \tag{27.25}$$

og symmetribetingelsen bliver for en andenordens tensor

$$\underset{\sim}{H}^R = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{H} \cdot \underset{\sim}{R}^T = 4\hat{a}\hat{a} \cdot \underset{\sim}{H} \cdot \hat{a}\hat{a} - 2\hat{a}\hat{a} \cdot \underset{\sim}{H} - 2\underset{\sim}{H} \cdot \hat{a}\hat{a} + \underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H} \tag{27.26}$$

eller

$$4\hat{a}\hat{a} \cdot \underset{\sim}{H} \cdot \hat{a}\hat{a} - 2\hat{a}\hat{a} \cdot \underset{\sim}{H} - 2\underset{\sim}{H} \cdot \hat{a}\hat{a} = \underset{\sim}{0} \tag{27.27}$$

Foruden $\underset{\sim}{H} = \eta_0 \underset{\sim}{I} + \eta_1 A + \eta_2 \hat{a}\hat{a}$, som er transvers isotrop om $\hat{a}$, opfylder enhver plan tensor $\underset{\sim}{P}$ vinkelret på $\hat{a}$ betingelsen.

Med de tre ortogonale vektorer $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ og $\hat{k}$ som i afsnit 26.1.4 og med $\hat{k}$ som omdrejningsakse har man en sum af et komplet sæt af lineært uafhængige andenordens tensorer vinkelret på $\hat{k}$ bestemt ved

$$\underset{\sim}{P} = (\hat{\imath} + \hat{\jmath})(\hat{\imath} + \hat{\jmath}) = \hat{\imath}\hat{\imath} + \hat{\imath}\hat{\jmath} + \hat{\jmath}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\hat{\jmath} \tag{27.28}$$

Af de fire tensorer er kombinationerne

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{A} &= \hat{k} \times \underset{\sim}{I} = \hat{\jmath}\hat{\imath} - \hat{\imath}\hat{\jmath} \\ A^2 &= \hat{k}\hat{k} - \underset{\sim}{I} = -(\hat{\imath}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\hat{\jmath}) \end{aligned} \tag{27.29}$$

allerede indført og kun 2 nye tensorer er nødvendige for at kunne udtrykke en vilkårlig plan tensor.

Med

$$\begin{aligned} G^1 &= \hat{\imath}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\hat{\jmath} + \hat{k}\hat{k} && = \underset{\sim}{I} \\ G^2 &= \hat{k}\hat{k} && \\ G^3 &= \hat{\jmath}\hat{\imath} - \hat{\imath}\hat{\jmath} && = \hat{k} \times \underset{\sim}{I} \\ G^4 &= \hat{\jmath}\hat{\jmath} && \\ G^5 &= \hat{\jmath}\hat{\imath} + \hat{\imath}\hat{\jmath} && = \hat{\jmath}\hat{\jmath} \times \hat{k} - \hat{k} \times \hat{\jmath}\hat{\jmath} \end{aligned} \tag{27.30}$$

vil tensoren

$$\underset{\sim}{H} = \eta_\gamma \underset{\sim}{G}^\gamma \tag{27.31}$$

udvise 2-fold symmetri om $\hat{k}$-aksen for $\gamma = 1, 2, 3, 4$ og 5. Tensoren vil udvise transvers isotropi for $\gamma = 1, 2$ og 3 dvs $\eta_4 = \eta_5 = 0$, og isotropi for $\gamma = 1$ dvs. $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = \eta_5 = 0$.

Føjes

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{G}^6 &= \hat{\imath}\hat{k} - \hat{k}\hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \underset{\sim}{I} \\ \underset{\sim}{G}^7 &= \hat{\imath}\hat{k} + \hat{k}\hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{k}\hat{k} - \hat{k}\hat{k} \times \hat{\jmath} \end{aligned} \tag{27.32}$$

til listen (27.24), vil tensorerne

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{H}_1 &= \eta_1 \underset{\sim}{G}^1 + \eta_2 \underset{\sim}{G}^2 + \eta_3 \underset{\sim}{G}^3 + \eta_4 \underset{\sim}{G}^4 + \eta_5 \underset{\sim}{G}^5 \\ \underset{\sim}{H}_2 &= \eta_1 \underset{\sim}{G}^1 + \eta_4 \underset{\sim}{G}^4 + \eta_6 \underset{\sim}{G}^6 + \eta_2 \underset{\sim}{G}^2 + \eta_7 \underset{\sim}{G}^7 \end{aligned} \tag{27.33}$$

udvise 2-fold symmetri om henholdsvis $\hat{k}$ og $\hat{\jmath}$.

Tensoren

$$\underset{\sim}{H}_3 = \eta_1 \underset{\sim}{G}^1 + \eta_2 \underset{\sim}{G}^2 + \eta_4 \underset{\sim}{G}^4 = \eta_1 \underset{\sim}{I} + \eta_2 \hat{k}\hat{k} + \eta_4 \hat{\jmath}\hat{\jmath} \tag{27.34}$$

vil udvise 2-fold symmetri om både $\hat{k}$ og $\hat{\jmath}$ på samme tid, og endelig vil tensoren

$$\underset{\sim}{H}_4 = \eta_1 \underset{\sim}{G}^1 + \eta_2 \underset{\sim}{G}^2 \tag{27.35}$$

udvise transvers isotropi om $\hat{k}$ og 2-fold symmetri om enhver akse vinkelret på $\hat{k}$.

27.2.2 Tensorer af fjerde orden

En sum af et komplet sæt bestående af 81 lineært uafhængige tensorer af fjerde orden bestemmes ved

$$\begin{aligned} &(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}) = \\ &= (\hat{\imath}\hat{\imath} + \hat{\imath}\hat{\jmath} + \hat{\imath}\hat{k} + \hat{\jmath}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\hat{\jmath} + \hat{\jmath}\hat{k} + \hat{k}\hat{\imath} + \hat{k}\hat{\jmath} + \hat{k}\hat{k})(\hat{\imath}\hat{\imath} + \hat{\imath}\hat{\jmath} + \hat{\imath}\hat{k} + \hat{\jmath}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\hat{\jmath} + \hat{\jmath}\hat{k} + \hat{k}\hat{\imath} + \hat{k}\hat{\jmath} + \hat{k}\hat{k}) = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{i}\hat{i}\hat{i}\hat{i} + \hat{i}\hat{i}\hat{i}\hat{j} + \hat{i}\hat{i}\hat{i}\hat{k} + \hat{i}\hat{i}\hat{j}\hat{i} + \hat{i}\hat{i}\hat{j}\hat{j} + \hat{i}\hat{i}\hat{j}\hat{k} + \hat{i}\hat{i}\hat{k}\hat{i} + \hat{i}\hat{i}\hat{k}\hat{j} + \hat{i}\hat{i}\hat{k}\hat{k} + \\
&+ \hat{i}\hat{j}\hat{i}\hat{i} + \hat{i}\hat{j}\hat{i}\hat{j} + \hat{i}\hat{j}\hat{i}\hat{k} + \hat{i}\hat{j}\hat{j}\hat{i} + \hat{i}\hat{j}\hat{j}\hat{j} + \hat{i}\hat{j}\hat{j}\hat{k} + \hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{i} + \hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{j} + \hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{k} + \\
&+ \hat{i}\hat{k}\hat{i}\hat{i} + \hat{i}\hat{k}\hat{i}\hat{j} + \hat{i}\hat{k}\hat{i}\hat{k} + \hat{i}\hat{k}\hat{j}\hat{i} + \hat{i}\hat{k}\hat{j}\hat{j} + \hat{i}\hat{k}\hat{j}\hat{k} + \hat{i}\hat{k}\hat{k}\hat{i} + \hat{i}\hat{k}\hat{k}\hat{j} + \hat{i}\hat{k}\hat{k}\hat{k} + \\
&+ \hat{j}\hat{i}\hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{i}\hat{i}\hat{j} + \hat{j}\hat{i}\hat{i}\hat{k} + \hat{j}\hat{i}\hat{j}\hat{i} + \hat{j}\hat{i}\hat{j}\hat{j} + \hat{j}\hat{i}\hat{j}\hat{k} + \hat{j}\hat{i}\hat{k}\hat{i} + \hat{j}\hat{i}\hat{k}\hat{j} + \hat{j}\hat{i}\hat{k}\hat{k} + \\
&+ \hat{j}\hat{j}\hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j}\hat{i}\hat{j} + \hat{j}\hat{j}\hat{i}\hat{k} + \hat{j}\hat{j}\hat{j}\hat{i} + \hat{j}\hat{j}\hat{j}\hat{j} + \hat{j}\hat{j}\hat{j}\hat{k} + \hat{j}\hat{j}\hat{k}\hat{i} + \hat{j}\hat{j}\hat{k}\hat{j} + \hat{j}\hat{j}\hat{k}\hat{k} + \\
&+ \hat{j}\hat{k}\hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{k}\hat{i}\hat{j} + \hat{j}\hat{k}\hat{i}\hat{k} + \hat{j}\hat{k}\hat{j}\hat{i} + \hat{j}\hat{k}\hat{j}\hat{j} + \hat{j}\hat{k}\hat{j}\hat{k} + \hat{j}\hat{k}\hat{k}\hat{i} + \hat{j}\hat{k}\hat{k}\hat{j} + \hat{j}\hat{k}\hat{k}\hat{k} + \\
&+ \hat{k}\hat{i}\hat{i}\hat{i} + \hat{k}\hat{i}\hat{i}\hat{j} + \hat{k}\hat{i}\hat{i}\hat{k} + \hat{k}\hat{i}\hat{j}\hat{i} + \hat{k}\hat{i}\hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{i}\hat{j}\hat{k} + \hat{k}\hat{i}\hat{k}\hat{i} + \hat{k}\hat{i}\hat{k}\hat{j} + \hat{k}\hat{i}\hat{k}\hat{k} + \\
&\hat{k}\hat{j}\hat{i}\hat{i} + \hat{k}\hat{j}\hat{i}\hat{j} + \hat{k}\hat{j}\hat{i}\hat{k} + \hat{k}\hat{j}\hat{j}\hat{i} + \hat{k}\hat{j}\hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{j}\hat{j}\hat{k} + \hat{k}\hat{j}\hat{k}\hat{i} + \hat{k}\hat{j}\hat{k}\hat{j} + \hat{k}\hat{j}\hat{k}\hat{k} + \\
&\hat{k}\hat{k}\hat{i}\hat{i} + \hat{k}\hat{k}\hat{i}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}\hat{i}\hat{k} + \hat{k}\hat{k}\hat{j}\hat{i} + \hat{k}\hat{k}\hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}\hat{j}\hat{k} + \hat{k}\hat{k}\hat{k}\hat{i} + \hat{k}\hat{k}\hat{k}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}\hat{k}\hat{k}
\end{aligned} \tag{27.36}
$$

En vilkårlig tensor af fjerde orden kan skrives som en linearkombination af disse 81 tensorer. Nogle eksempler på hvordan frembringertensorerne $\underset{\sim}{G}^\gamma$ i $\eta_\gamma \underset{\sim}{G}^\gamma$ bestemmes, skal nu gennemgås.

Ved en 2-fold drejning om $\hat{k}$-aksen drejes $\hat{k}$ over i $\hat{k}, \hat{i}$ over i $-\hat{i}$ og $\hat{j}$ over i $-\hat{j}$. Tensoren $\hat{i}\hat{k}\hat{j}\hat{j}$ drejes over i $-\hat{i}\hat{k}\hat{j}\hat{j}$ og skal derfor have koefficienten nul ligesom alle tensorer med et $\hat{k}$ eller 3 $\hat{k}$'er. Tensoren $\hat{k}\hat{i}\hat{k}\hat{j}$ drejes over i $\hat{k}\hat{i}\hat{k}\hat{j}$ og kan derfor have en koefficient forskellig fra nul.

Ved en 4-fold drejning om $\hat{k}$ drejes $\hat{k}$ over i $\hat{k}$, $\hat{i}$ over i $\hat{j}$ og $\hat{j}$ over i $-\hat{i}$. Tensoren $\hat{i}\hat{j}\hat{j}\hat{j}$ drejes over i $-\hat{j}\hat{i}\hat{i}\hat{i}$ og kombinationen $\hat{i}\hat{j}\hat{j}\hat{j} - \hat{j}\hat{i}\hat{i}\hat{i}$ drejes således over i sig selv, og det er derfor denne kombination, der indgår blandt frembringertensorerne for tensorer, som udviser 4-fold symmetri om $\hat{k}$-aksen.

I tabel 27.1 er resultatet af undersøgelser af fjerdeordens tensorers symmetriforhold ved såvel diskrete som kontinuerte drejninger vist. Første række angiver hvilken form for symmetri, der er tale om med symbolet $\{1\,m\,n\}$. I dette symbol viser m, at $\hat{j}$ er en m-fold symmetriakse, og n at $\hat{k}$ er en n-fold symmetriakse. Tegnet ∞ angiver, at x er en kontinuert drejningsvinkel. Symbolet $\{112/3\}$ angiver, at $\hat{k}$ er en 2-fold symmetriakse, og $(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})/\sqrt{3}$ samtidig er en 3-fold symmetriakse. De næste 49 rækker fortæller om η_γ er forskellig fra $(\times)$ eller lig med nul (0). Endelig indeholder den sidste række oplysning om antallet af η_γ forskellig fra nul i hver kolonnne.

Frembringertensorerne $\underset{\sim}{G}^{\gamma}$ er, udover de i (27.16) anførte

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{G}^{20} &= \hat{i}\hat{i}\hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j}\hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}\hat{k}\hat{k} \\
\underset{\sim}{G}^{21} &= \hat{i}\hat{j}\hat{j}\hat{j} - \hat{j}\hat{i}\hat{i}\hat{i} \\
\underset{\sim}{G}^{22} &= \hat{i}\hat{k}\hat{j}\hat{j} - \hat{i}\hat{k}\hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{k}\hat{i}\hat{j} + \hat{j}\hat{k}\hat{j}\hat{i} \\
\underset{\sim}{G}^{23} &= \hat{j}\hat{j}\hat{i}\hat{k} - \hat{i}\hat{i}\hat{i}\hat{k} + \hat{i}\hat{j}\hat{j}\hat{k} + \hat{j}\hat{i}\hat{j}\hat{k} \\
\underset{\sim}{G}^{24} &= \hat{k}\hat{i}\hat{j}\hat{j} - \hat{k}\hat{i}\hat{i}\hat{i} + \hat{k}\hat{j}\hat{i}\hat{j} + \hat{k}\hat{j}\hat{j}\hat{i} \\
\underset{\sim}{G}^{25} &= \hat{j}\hat{j}\hat{k}\hat{i} - \hat{i}\hat{i}\hat{k}\hat{i} + \hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{j} + \hat{j}\hat{i}\hat{k}\hat{j} \\
\underset{\sim}{G}^{26} &= \hat{i}\hat{k}\hat{i}\hat{j} + \hat{i}\hat{k}\hat{j}\hat{i} + \hat{j}\hat{k}\hat{i}\hat{i} - \hat{j}\hat{k}\hat{j}\hat{j} \\
\underset{\sim}{G}^{27} &= \hat{i}\hat{j}\hat{i}\hat{k} + \hat{j}\hat{i}\hat{i}\hat{k} + \hat{i}\hat{i}\hat{j}\hat{k} - \hat{j}\hat{j}\hat{j}\hat{k} \\
\underset{\sim}{G}^{28} &= \hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{i} + \hat{j}\hat{i}\hat{k}\hat{i} + \hat{i}\hat{i}\hat{k}\hat{j} - \hat{j}\hat{j}\hat{k}\hat{j} \\
\underset{\sim}{G}^{29} &= \hat{k}\hat{i}\hat{i}\hat{j} + \hat{k}\hat{i}\hat{j}\hat{i} + \hat{k}\hat{j}\hat{i}\hat{i} - \hat{k}\hat{j}\hat{j}\hat{j} \\
\underset{\sim}{G}^{30} &= \hat{k}\hat{k}\hat{i}\hat{i} - \hat{k}\hat{k}\hat{j}\hat{j} + \hat{i}\hat{i}\hat{j}\hat{j} - \hat{j}\hat{j}\hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j}\hat{k}\hat{k} - \hat{i}\hat{i}\hat{k}\hat{k} \\
\underset{\sim}{G}^{31} &= \hat{k}\hat{i}\hat{k}\hat{i} - \hat{k}\hat{j}\hat{k}\hat{j} + \hat{i}\hat{j}\hat{i}\hat{j} - \hat{j}\hat{i}\hat{j}\hat{i} + \hat{j}\hat{k}\hat{j}\hat{k} - \hat{i}\hat{k}\hat{i}\hat{k} \\
\underset{\sim}{G}^{32} &= \hat{k}\hat{i}\hat{i}\hat{k} - \hat{k}\hat{j}\hat{j}\hat{k} + \hat{i}\hat{j}\hat{j}\hat{i} - \hat{j}\hat{i}\hat{i}\hat{j} + \hat{j}\hat{k}\hat{k}\hat{j} - \hat{i}\hat{k}\hat{k}\hat{i} \\
\underset{\sim}{G}^{33} &= \hat{i}\hat{i}\hat{i}\hat{i} - \hat{j}\hat{j}\hat{j}\hat{j} \\
\underset{\sim}{G}^{34} &= \hat{k}\hat{k}\hat{i}\hat{i} - \hat{k}\hat{k}\hat{j}\hat{j} \\
\underset{\sim}{G}^{35} &= \hat{k}\hat{i}\hat{k}\hat{i} - \hat{k}\hat{j}\hat{k}\hat{j} \\
\underset{\sim}{G}^{36} &= \hat{k}\hat{i}\hat{i}\hat{k} - \hat{k}\hat{j}\hat{j}\hat{k} \\
\underset{\sim}{G}^{37} &= \hat{j}\hat{j}\hat{k}\hat{k} - \hat{i}\hat{i}\hat{k}\hat{k} \\
\underset{\sim}{G}^{38} &= \hat{j}\hat{k}\hat{j}\hat{k} - \hat{i}\hat{k}\hat{i}\hat{k} \\
\underset{\sim}{G}^{39} &= \hat{j}\hat{k}\hat{k}\hat{j} - \hat{i}\hat{k}\hat{k}\hat{i} \\
\underset{\sim}{G}^{40} &= \hat{k}\hat{k}\hat{j}\hat{i} + \hat{k}\hat{k}\hat{i}\hat{j} \\
\underset{\sim}{G}^{41} &= \hat{k}\hat{j}\hat{k}\hat{i} + \hat{k}\hat{i}\hat{k}\hat{j} \\
\underset{\sim}{G}^{42} &= \hat{k}\hat{j}\hat{i}\hat{k} + \hat{k}\hat{i}\hat{j}\hat{k} \\
\underset{\sim}{G}^{43} &= \hat{j}\hat{i}\hat{k}\hat{k} + \hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{k} \\
\underset{\sim}{G}^{44} &= \hat{j}\hat{k}\hat{i}\hat{k} + \hat{i}\hat{k}\hat{j}\hat{k} \\
\underset{\sim}{G}^{45} &= \hat{j}\hat{k}\hat{k}\hat{i} + \hat{i}\hat{k}\hat{k}\hat{j} \\
\underset{\sim}{G}^{46} &= \hat{i}\hat{j}\hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{i}\hat{j}\hat{j} \\
\underset{\sim}{G}^{47} &= \hat{i}\hat{i}\hat{j}\hat{i} + \hat{j}\hat{j}\hat{i}\hat{j} \\
\underset{\sim}{G}^{48} &= \hat{i}\hat{i}\hat{i}\hat{j} + \hat{j}\hat{j}\hat{j}\hat{i} \\
\underset{\sim}{G}^{49} &= \hat{j}\hat{i}\hat{i}\hat{i} + \hat{i}\hat{j}\hat{j}\hat{j}
\end{aligned}
\tag{27.37}
$$

	{112}	{113}	{114}	{11∞}	{122}	{123}	{124}	{12∞}	{112/3}	{144}	{∞∞∞}
$\gamma = 1$	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
2	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
3	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
4	×	×	×	×	×	×	×	×	0	0	0
5	×	×	×	×	×	×	×	×	0	0	0
6	×	×	×	×	×	×	×	×	0	0	0
7	×	×	×	×	×	×	×	×	0	0	0
8	×	×	×	×	×	×	×	×	0	0	0
9	×	×	×	×	×	×	×	×	0	0	0
10	×	×	×	×	×	×	×	×	0	0	0
11	×	×	×	×	0	0	0	0	0	0	0
12	×	×	×	×	0	0	0	0	0	0	0
13	×	×	×	×	0	0	0	0	0	0	0
14	×	×	×	×	0	0	0	0	0	0	0
15	×	×	×	×	0	0	0	0	0	0	0
16	×	×	×	×	0	0	0	0	0	0	0
17	×	×	×	×	0	0	0	0	0	0	0
18	×	×	×	×	0	0	0	0	0	0	0
19	×	×	×	×	0	0	0	0	0	0	0
20	×	0	×	0	×	0	×	0	×	×	0
21	×	0	×	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	×	0	0	0	×	0	0	0	0	0
23	0	×	0	0	0	×	0	0	0	0	0
24	0	×	0	0	0	×	0	0	0	0	0
25	0	×	0	0	0	×	0	0	0	0	0
26	0	×	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	×	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	×	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	×	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	×	0	0	0	×	0	0	0	×	0	0
31	×	0	0	0	×	0	0	0	×	0	0
32	×	0	0	0	×	0	0	0	×	0	0
33	×	0	0	0	×	0	0	0	0	0	0
34	×	0	0	0	×	0	0	0	0	0	0
35	×	0	0	0	×	0	0	0	0	0	0
36	×	0	0	0	×	0	0	0	0	0	0
37	×	0	0	0	×	0	0	0	0	0	0
38	×	0	0	0	×	0	0	0	0	0	0
39	×	0	0	0	×	0	0	0	0	0	0
40	×	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41	×	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
42	×	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
43	×	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
44	×	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
45	×	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
46	×	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
47	×	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
48	×	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
49	×	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Antal $\eta_\gamma \neq 0$	41	27	21	19	21	14	11	10	7	4	3

Tabel 27.1

$\times \sim \eta_\gamma \neq 0$

$0 \sim \eta_\gamma = 0$

Øvelse 27.1

Vis, at tensoren $\hat{\imath}\hat{k}\hat{\jmath}\hat{\jmath} - \hat{\imath}\hat{k}\hat{\imath}\hat{\imath} + \hat{\jmath}\hat{k}\hat{\imath}\hat{\jmath} + \hat{\jmath}\hat{k}\hat{\jmath}\hat{\imath}$ drejes over i sig selv ved en drejning $2\pi/3$ om $\hat{k}$.

28. SYMMETRIDREJNINGER AF FUNKTIONER AF TENSORER

En tensor $\underset{\sim}{L}$ kan drejes over i$\underset{\sim}{L}^R$ som diskuteret i afsnit 27. Hvis $\underset{\sim}{L}$ er en funktion af en anden tensor $\underset{\sim}{M}$

$$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M}) \tag{28.1}$$

kan man dreje argumenttensoren, og funktionsværdien af den drejede argumenttensor betegnes $\underset{\sim}{L}^*$, dvs.

$$\underset{\sim}{L}^* = \underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M}^R) \tag{28.2}$$

I almindelighed vil $\underset{\sim}{L}^R$ og $\underset{\sim}{L}^*$ være forskellige, som det fremgår af følgende eksempel:

Med $\quad \overline{u}(\overline{v}) = \overline{\overline{K}} \cdot \overline{v}$, $\overline{\overline{K}}$ konstant

er $\quad \overline{u}^R = \underset{\sim}{R} \cdot \overline{u} = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{K} \cdot \overline{v}$

og $\quad \overline{u}^* = \underset{\sim}{K} \cdot \overline{v}^R = \underset{\sim}{K} \cdot \underset{\sim}{R} \cdot \overline{v}$

og derfor $\overline{u}^R \neq \overline{u}^*$

I de specielle tilfælde hvor man har

$$\underset{\sim}{L}^R = \underset{\sim}{L}^* \tag{28.3}$$

siges $\underset{\sim}{R}$ at være en symmetridrejning for funktionen $\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M})$, og relationen (28.3) kaldes en symmetrirelation. Når symmetrirelationen (28.3) er opfyldt, betegnes $\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M})$ som en *forminvariant* funktion under drejningen $\underset{\sim}{R}$, en anisotrop funktion.

28.1 Kontinuerte symmetridrejninger

Ved hjælp af $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{R}^{-1} = \underset{\sim}{R}^T$ kan den drejede tensor $\underset{\sim}{L}^R$ drejes tilbage i den oprindelige tensor $\underset{\sim}{L} = (\underset{\sim}{L}^R)^P$ og symmetrirelationen bliver

$$\underset{\sim}{L} = (\underset{\sim}{L}^*)^P \tag{28.4}$$

I (28.4) er det kun højresiden, der afhænger af drejningsvinklen χ, og hvis betingelsen skal være opfyldt for vilkårlige værdier af χ må

$$d(\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M}^R))^P / d\chi = \underset{\sim}{0} \tag{28.5}$$

være opfyldt.

28.1.1 Skalarfunktioner

For en skalær funktion φ af en vektor $\overline{v}$ er

$$\begin{aligned} \varphi^R(\overline{v}) &= \varphi(\overline{v}) \\ \varphi^*(\overline{v}) &= \varphi(\overline{v}^R)\ ,\ \overline{v}^R = \underset{\sim}{R}\cdot\overline{v} \end{aligned} \tag{28.6}$$

og symmetrirelationen (28.5) bliver

$$d\varphi/d\chi = \left(d\overline{v}^R/d\chi\right)\cdot\left(d\varphi/d\overline{v}^R\right) = \underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{R}\cdot\overline{v}\cdot d\varphi/d\overline{v}^R = 0 \tag{28.7}$$

Da

$$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{R}\cdot\overline{v} = \hat{a}\times\overline{v}^R \tag{28.8}$$

må $d\varphi/d\overline{v}^R$ være vinkelret på denne vektor, hvilket er tilfældet når

$$d\varphi/d\overline{v}^R = \alpha\overline{v}^R + \beta\hat{a} \tag{28.9}$$

hvor α og β er skalarer som ikke afhænger af x. I henhold til afsnit 26.2 er derfor $\varphi = \varphi\left(\overline{v}^R\cdot\overline{v}^R, \overline{v}^R\cdot\hat{a}\right)$ eller, da $\overline{v}^R\cdot\overline{v}^R = \overline{v}\cdot\overline{v}$ og $\overline{v}^R\cdot\hat{a} = \overline{v}\cdot\hat{a}$

$$\varphi(\overline{v}) = \varphi(\overline{v}\cdot\overline{v}, \overline{v}\cdot\hat{a}) \tag{28.10}$$

Funktionen φ i (28.10) er transvers isotrop med hensyn til drejninger om $\hat{a}$. En isotrop funktion bliver

$$\varphi(\overline{v}) = \varphi(\overline{v}\cdot\overline{v}) \tag{28.11}$$

Er $\varphi = \varphi(\overline{u}, \overline{v})$ en funktion af to vektorer $\overline{u}$ og $\overline{v}$, har man

$$\begin{aligned} d\varphi/d\chi &= (d\overline{u}^R/d\chi)\cdot\partial\varphi/\partial\overline{u}^R + (d\overline{v}^R/d\chi)\cdot\partial\varphi/\partial\overline{v}^R \\ &= \hat{a}\times\overline{u}^R\cdot\partial\varphi/\partial\overline{u}^R + \hat{a}\times v^R\cdot\partial\varphi/\partial\overline{v}^R = 0 \end{aligned} \tag{28.12}$$

der er opfyldt for

$$\begin{aligned} \partial\varphi/\partial\overline{u}^R &= \alpha\overline{u}^R + \beta\hat{a} \\ \partial\varphi/\partial\overline{v}^R &= \gamma\cdot\overline{v}^R + \delta\hat{a} \end{aligned} \tag{28.13}$$

hvor α, β, γ og δ er konstanter og som medfører, at begge led i (28.12) bliver nul.

Hertil kommer

$$\partial\varphi/\partial\overline{u}^R = \lambda\overline{v}^R$$
$$\partial\varphi/\partial\overline{v}^R = \lambda\overline{u}^R \tag{28.14}$$

som medfører, at de to led bliver lige store med modsat fortegn.

Af (28.13), (28.14) og bemærkningen umiddelbart før (28.10) fås, at en skalær funktion φ af de to vektorargumenter $\overline{u}$ og $\overline{v}$, som er transvers isotrop med hensyn til omdrejningsaksen $\hat{a}$, kan skrives

$$\varphi(\overline{u},\overline{v}) = \varphi(\overline{u}\cdot\overline{u},\ \overline{u}\cdot\overline{v},\ \overline{v}\cdot\overline{v},\ \overline{u}\cdot\hat{a},\ \overline{v}\cdot\hat{a}) \tag{28.15}$$

og en isotrop, skalær funktion af $\overline{u}$ og $\overline{v}$ bliver

$$\varphi(\overline{u},\overline{v}) = \varphi(\overline{u}\cdot\overline{u},\ \overline{u}\cdot\overline{v},\ \overline{v}\cdot\overline{v}) \tag{28.16}$$

For en skalar φ som funktion af en tensor $\overline{\overline{D}}$ af anden orden, er

$$\varphi^R(\underset{\sim}{D}) = \varphi(\underset{\sim}{D})$$
$$\varphi^*(\underset{\sim}{D}) = \varphi(\underset{\sim}{D})^R,\quad \underset{\sim}{D}^R = \underset{\sim}{R}\cdot\underset{\sim}{D}\cdot\underset{\sim}{R}^T \tag{28.17}$$

og for vilkårlige drejninger om en akse skal (28.5)

$$d\varphi/d\chi = (d\underset{\sim}{D}^R/d\chi) : d\varphi/dD^R = 0 \tag{28.18}$$

være opfyldt.

Med

$$d\underset{\sim}{D}^R/d\chi = \underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{R}\cdot\underset{\sim}{D}\cdot\underset{\sim}{R}^T + \underset{\sim}{R}\cdot\underset{\sim}{D}\cdot\underset{\sim}{R}^T\cdot\underset{\sim}{A}^T = \underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{D}^R - \underset{\sim}{D}^R - \underset{\sim}{D}^R\cdot\underset{\sim}{A} \tag{28.19}$$

og med $\underset{\sim}{D}$ i stedet for $\underset{\sim}{D}^R$ bliver (28.18)

$$(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{D}\cdot\underset{\sim}{A}) : d\varphi/d\underset{\sim}{D} = 0 \tag{28.20}$$

Skalære funktioner af $\underset{\sim}{D}$ og $\underset{\sim}{A}$ kan bl.a. skrives som funktioner af

$$\psi = \underset{\sim}{A}^m : \underset{\sim}{D}^n = \underset{\sim}{D}^n : \underset{\sim}{A}^m \tag{28.21}$$

hvor eksponenterne $m = 0, 1$ og 2, $n = 1, 2$ og 3, i alt 9 størrelser som dog ikke alle er uafhængige. Når $\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^n$, $n = 1, 2$ og 3, er bestemt, kan hovedinvarianterne $I_{\underset{\sim}{D}}$, $II_{\underset{\sim}{D}}$ og $III_{\underset{\sim}{D}}$ bestemmes, jf. (26.87), og Cayley-Hamiltons sætning kan benyttes

$$\underset{\sim}{U} * \underset{\sim}{D}^3 = I_{\underset{\sim}{D}} \underset{\sim}{U} * \underset{\sim}{D}^2 - II_{\underset{\sim}{D}} \underset{\sim}{U} * \underset{\sim}{D} + III_{\underset{\sim}{D}} \underset{\sim}{U} * \underset{\sim}{I} \tag{28.22}$$

og de skalære funktioner, der skal undersøges, bliver

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D},\ \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^2,\ \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^3 \\ &\underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{D},\ \underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{D}^2 \\ &\hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{D},\ \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{D}^2 \end{aligned} \tag{28.23}$$

De anførte skalarer opfylder alle symmetribetingelsen (28.20), og de er derfor forminvariante funktioner under vilkårlige drejninger om $\hat{a}$, dvs. transvers isotrope skalære funktioner af $\underset{\sim}{D}$.

Det fremgår umiddelbart, at enhver funktion

$$\varphi = \varphi(\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D},\ \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^2, \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^3) \tag{28.24}$$

er en isotrop funktion af $\underset{\sim}{D}$ ligesom hovedinvarianterne.

For selvtransponerede tensorer $\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{S}^T$ og antiselvtransponerede tensorer $\underset{\sim}{W} = -\underset{\sim}{W}^T$ har man i henhold til (4.94), at

$$\underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{W} = 0 \tag{28.25}$$

Idet $\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}^T$ medfører at $\underset{\sim}{D}^2 = (\underset{\sim}{D}^2)^T$ og $\underset{\sim}{D}^3 = (\underset{\sim}{D}^3)^T$ og dermed $\underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{D}^2 = 0$ har man, at kun invarianterne

$$\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D},\ \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^2,\ \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^3,\ \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{D} \quad \text{og} \quad \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{D}^2 \tag{28.26}$$

er forskellige fra nul for selvtransponerede tensorer.

Med $\underset{\sim}{D} = -\underset{\sim}{D}^T$ bliver $\underset{\sim}{D}^2 = (\underset{\sim}{D}^2)^T$ og $\underset{\sim}{D}^3 = -(\underset{\sim}{D}^3)^T$ og dermed $\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^3 = \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{D}^2 = 0$ og kun invarianterne

$$I : D^2,\ A : D \quad \text{og} \quad \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{D}^2 \tag{28.27}$$

er forskellige fra nul for antiselvtransponerede tensorer.

Man bemærker, at invarianten $\underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{D}^2$ ikke optræder i hverken (28.26) eller (28.27). Dette skyldes, at både $\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}^T$ og $\underset{\sim}{D} = -\underset{\sim}{D}^T$ medfører at $\underset{\sim}{D}^2 = (\underset{\sim}{D}^2)^T$. For en vilkårlig tensor $\underset{\sim}{D} \neq \pm\underset{\sim}{D}^T$ er $\underset{\sim}{D}^2 \neq (\underset{\sim}{D}^2)^T$ og dermed $\underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{D}^2 \neq 0$.

Yderligere er $\psi = \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{D}^T = D : D = D^T : D^T$ invariant under enhver drejning om enhver akse og kun for $\underset{\sim}{D} = \pm\underset{\sim}{D}^T$ er $\underset{\sim}{D} : \underset{\sim}{D} = \pm\underset{\sim}{D} : \underset{\sim}{D}^T = \pm\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^2$. Til de isotrope, skalære funktioner skal man derfor også medregne

$$\psi = \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{D}^T \tag{28.28}$$

Tilsvarende er $\underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{D}^T : \hat{a}\hat{a}$ invariant under drejninger om $\hat{a}$.

Da man har $\overline{\overline{L}} : \overline{\overline{M}}^T = \overline{\overline{L}}^T : \overline{\overline{M}}$, gælder

$$\begin{aligned}
&\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^T = \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D} \\
&\underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{D}^T = -\underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{D} \\
&\hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{D}^T = \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{D} \\
&\underset{\sim}{I} : (\underset{\sim}{D}^T)^2 = \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^2 = \underset{\sim}{D} : \underset{\sim}{D}^T \\
&\underset{\sim}{A} : (\underset{\sim}{D}^T)^2 = -\underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{D}^2 \\
&\hat{a}\hat{a} : (\underset{\sim}{D}^T)^2 = \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{D}^2 \\
&\underset{\sim}{I} : (\underset{\sim}{D}^T)^3 = \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^3 \\
&\underset{\sim}{D}^T : \underset{\sim}{D}^T = \underset{\sim}{D} : \underset{\sim}{D}
\end{aligned} \tag{28.29}$$

og listen over isotrope skalarer omfatter

$$\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D},\ \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^2,\ \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^3 \quad \text{og} \quad \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{D}^T \tag{28.30}$$

For transvers isotropi om $\hat{a}$ kommer hertil

$$\underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{D},\ \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{D},\ \underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{D}^2,\ \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{D}^2 \quad \text{og} \quad \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{D}^T \tag{28.31}$$

Når $\varphi = \varphi(\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{E})$ er en funktion af de to andenordens tensorer $\overline{\overline{D}}$ og $\overline{\overline{E}}$ bliver symmetrirelationen

$$(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{A}) : \partial\varphi/\partial\underset{\sim}{D} + (\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{E} - \underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{A}) : \partial\varphi/\partial\underset{\sim}{E} = 0 \tag{28.32}$$

hvor $\underset{\sim}{D}^R$ og $\underset{\sim}{E}^R$ er skiftet ud med $\underset{\sim}{D}$ og $\underset{\sim}{E}$ som før.

Relationen er opfyldt af følgende værdier af ψ

$$
\begin{aligned}
&\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D},\ \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^2,\ \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^3,\ \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{D}^T \\
&\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{E},\ \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{E}^2,\ \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{E}^3,\ \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{E}^T \\
&\underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{D},\ \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{D},\ \underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{D}^2,\ \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{D}^2, \hat{a}\hat{a} : D \cdot D^T \\
&\underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{E},\ \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{E},\ \underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{E}^2,\ \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{E}^2,\ \hat{a}\hat{a} : E \cdot E^T
\end{aligned}
\tag{28.33}
$$

som medfører, at begge led i (28.32) bliver nul.

Hertil kommer udtryk som medfører, at de to led tilsammen bliver nul, f.eks. $\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{D} : \underset{\sim}{E}^T = \underset{\sim}{D}^T : \underset{\sim}{E}$.

28.1.2 Vektorfunktioner

For en vektor $\overline{u}$ som funktion af en vektor $\overline{v}$ er

$$
\begin{aligned}
&\overline{u}^R(\overline{v}) = \underset{\sim}{R} \cdot \overline{u}(\overline{v}) \\
&\overline{u}^*(\overline{v}) = \overline{u}(\overline{v}^R)\ ,\ \overline{v}^R = \underset{\sim}{R} \cdot \overline{v}
\end{aligned}
\tag{28.34}
$$

Symmetrirelationen (28.5) bliver

$$
\begin{aligned}
&d(\underset{\sim}{R}^T \cdot \overline{u}(\overline{v}^R))/d\chi = \underset{\sim}{R}^T \cdot \underset{\sim}{A}^T \cdot \overline{u}(\overline{v}^R) + \underset{\sim}{R}^T \cdot ((d\overline{v}^R/d\chi) \cdot d\overline{u}/d\overline{v}^R)) \\
&= \underset{\sim}{R}^T \cdot ((\underset{\sim}{A} \cdot \overline{v}^R) \cdot d\overline{u}/d\overline{v}^R - \underset{\sim}{A} \cdot \overline{u}(v^R)) = \overline{0}
\end{aligned}
\tag{28.35}
$$

som med $\overline{v}$ i stedet for $\overline{v}^R$ er opfyldt for

$$
(\underset{\sim}{A} \cdot \overline{v}) \cdot d\overline{u}/d\overline{v} - \underset{\sim}{A} \cdot \overline{u}(\overline{v}) = \overline{0} \tag{28.36}
$$

Sættes

$$
\overline{u} = \alpha \overline{\overline{\overline{H}}} \cdot \overline{v} \tag{28.37}
$$

hvor α er en skalær funktion af $\overline{v} \cdot \overline{v}$ og $\overline{v} \cdot \hat{a}$, som er invariant under vilkårlige drejninger om $\hat{a}$, finder man, at (28.36) er opfyldt for

$$
\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{I}\ ,\ \underset{\sim}{A} \quad \text{og} \quad \underset{\sim}{A}^2 \tag{28.38}
$$

dvs

$$\overline{u} = \left(\alpha_0 I + \alpha_1 \underset{\sim}{A} + \alpha_2 \underset{\sim}{A}^2\right) \cdot \overline{v} \tag{28.39}$$

Forskellen på koefficienten til $\overline{v}$ i (28.39) og $\underset{\sim}{H} = \beta_0 \underset{\sim}{I} + \beta_1 \underset{\sim}{A} + \beta_2 \underset{\sim}{A}^2$ i (27.11) er, at α_γ er funktioner af $\overline{v} \cdot \overline{v}$ og $\overline{v} \cdot \overline{a}$, mens β_γ er konstanter.

En isotrop vektorfunktion af $\overline{v}$ kan herefter repræsenteres ved

$$\overline{u} = \alpha \underset{\sim}{I} \cdot \overline{v} = \alpha \overline{v} \tag{28.40}$$

hvor α er en funktion af $\overline{v} \cdot \overline{v} = v^2$.

28.1.3 Andenordens tensorfunktioner

For en tensor af anden orden $\overline{\overline{U}}$ som funktion af en tensor af anden orden $\overline{\overline{D}}$ er

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{U}^R(\underset{\sim}{D}) = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{U}(\underset{\sim}{D}) \cdot \underset{\sim}{R}^T \\ &\underset{\sim}{U}^*(\underset{\sim}{D}) = \underset{\sim}{U}(\underset{\sim}{D}^R)\ ,\ \underset{\sim}{D}^R = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{R}^T \end{aligned} \tag{28.41}$$

Symmetrirelationer (28.5) bliver

$$\begin{aligned} &d(\underset{\sim}{R}^T \cdot \underset{\sim}{U}(\underset{\sim}{D}^R) \cdot \underset{\sim}{R})/d\chi = \\ &= \underset{\sim}{R}^T \cdot (\underset{\sim}{A}^T \cdot \underset{\sim}{U}(\underset{\sim}{D}^R) + (d\underset{\sim}{D}^R/d\chi) : d\underset{\sim}{U}/d\underset{\sim}{D}^R + \underset{\sim}{U}(D^R) \cdot \underset{\sim}{A}) \cdot R \\ &= \underset{\sim}{R}^T \cdot ((\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{D}^R - \underset{\sim}{D}^R \cdot \underset{\sim}{A}) : d\underset{\sim}{U}/d\underset{\sim}{D}^R - \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{A}) \cdot \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{0} \end{aligned} \tag{28.42}$$

som med $\underset{\sim}{D}$ i stedet for D^R er opfyldt for

$$(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{A}) : d\underset{\sim}{U}/d\underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{0} \tag{28.43}$$

Fra afsnit 27.1.2 vides, at tensorerne

$$\underset{\sim}{I}, \underset{\sim}{A} \quad \text{og} \quad \underset{\sim}{A}^2 \tag{28.44}$$

er invariante under drejninger om $\hat{a}$, så når $\underset{\sim}{U}$ skal være en funktion af $\underset{\sim}{D}$ kan man have

$$\underset{\sim}{U} = \varphi_1 \underset{\sim}{I} + \varphi_2 \underset{\sim}{A} + \varphi_3 \underset{\sim}{A}^2 \tag{28.45}$$

hvor φ_γ er invariante, skalære funktioner af $\underset{\sim}{D}$, se afsnit 28.1.1, og tensorerne i (28.44) er frembringertensorer.

Også tensorerne

$$\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{D}^2, \underset{\sim}{D}^T, (\underset{\sim}{D}^T)^2, \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{D}^T \quad \text{og} \quad \underset{\sim}{D}^T \cdot \underset{\sim}{D} \tag{28.46}$$

findes umiddelbart at opfylde symmetrirelationen.

Flere frembringertensorer kan søges blandt

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{D},\ \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{A},\ \hat{a}\hat{a} \cdot \underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{D} \cdot \hat{a}\hat{a} \\ &\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{D}^2,\ \underset{\sim}{D}^2 \cdot \underset{\sim}{A},\ \hat{a}\hat{a} \cdot \underset{\sim}{D}^2,\ D^2 \cdot \hat{a}\hat{a} \end{aligned} \tag{28.47}$$

som alle viser sig at tilfredsstille symmetrirelationen (28.43).

Der er 2 spørgsmål, som er ubesvarede. Det ene drejer sig om, hvorvidt de fundne frembringertensorer er lineært uafhængige, og det andet drejer sig om, hvorvidt der eksisterer flere frembringertensorer. Tilsvarende spørgsmål kan stilles vedrørende skalarfunktioner og vektorfunktioner og med hensyn til deres besvarelse henvises til speciallitteraturen. Formålet med nærværende fremstilling er at komme frem til resultater, som gør det muligt at opstille konstitutive ligninger for isotrope såvel som ansisotrope materialer.

28.2 Diskrete symmetridrejninger

Argumenttensorerne i afsnit 28.1 ses bl.a. at være produkter af på den ene side $\underset{\sim}{M}^n$, $n = 0, 1, 2$ og 3, og på den anden side de tensorer, der i henhold til afsnit 27.1 beskriver transvers isotropi, dvs. $\underset{\sim}{I}, \underset{\sim}{A}$ og $\underset{\sim}{A}^2$. Også når der er tale om diskrete symmetridrejninger, vil sådanne produkttensorer være argumenttensorer i anisotrope tensorfunktioner. Man har nemlig for en anisotrop funktion $\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M}, \underset{\sim}{\xi}^\gamma)$ under symmetridrejningen $\underset{\sim}{R}$, at symmetrirelationen

$$\underset{\sim}{L}^R = \underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M}^R, (\underset{\sim}{\xi}^\gamma)^R) \tag{28.48}$$

gælder. Idet tensorerne $\underset{\sim}{\xi}^\gamma$, de såkaldte *strukturtensorer*, der beskriver funktionens symmetriforhold, opfylder symmetribetingelsen

$$(\underset{\sim}{\xi}^\gamma)^R = \underset{\sim}{\xi}^\gamma \tag{28.49}$$

bliver relationen (28.48)

$$\underset{\sim}{L}^R = \underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M}^R, \underset{\sim}{\xi}^\gamma) \tag{28.50}$$

Heraf følger, at når relationen

$$\underset{\sim}{L}^{Q}(\underset{\sim}{M},\underset{\sim}{\xi}^{\gamma}) = \underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M}^{Q},(\underset{\sim}{\xi}^{\gamma})^{Q}) \tag{28.51}$$

er opfyldt for enhver drejning $\underset{\sim}{Q}$ om enhver akse, dvs. når $\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{M},\underset{\sim}{\xi}^{\gamma})$ er en isotrop funktion af $\underset{\sim}{M}$ og $\underset{\sim}{\xi}^{\gamma}$, da er $\underset{\sim}{L}$ en anisotrop funktion af $\underset{\sim}{M}$, en funktion hvis anisotropi er beskrevet af $\underset{\sim}{\xi}^{\gamma}$.

28.2.1 Skalarfunktioner

Skalarer, som er funktioner af en andenordens tensor $\underset{\sim}{D}$, og som er invariante under en n-fold drejning $\underset{\sim}{R}$ om en akse $\hat{a}$, kan f.eks. skrives

$$\psi^{\gamma} = \underset{\sim}{D}^{n} : \underset{\sim}{\xi}^{\gamma} \quad , \quad n = 1,2,3 \tag{28.52}$$

hvor $\underset{\sim}{\xi}^{\gamma}$ er tensorer af anden orden som beskriver den pågældende drejning, dvs. $(\underset{\sim}{\xi}^{\gamma})^{R} = \underset{\sim}{\xi}^{\gamma}$. Skalarer, som er invariante under en 2-fold drejning om $\hat{k}$, fås således ved i (28.52) at sætte

$$\underset{\sim}{\xi}^{\gamma} = \underset{\sim}{G}^{\gamma} \quad , \quad \gamma = 1,2\cdots 5 \tag{28.53}$$

hvor $\underset{\sim}{G}^{\gamma}$ er de i afsnit 27.21 anførte frembringertensorer. En anisotrop skalarfunktion er derfor

$$\varphi = \varphi(\underset{\sim}{D}^{n} : \underset{\sim}{\xi}^{\gamma}) \quad , \quad n = 1,2,3; \quad \gamma = 1,2\cdots 5 \tag{28.54}$$

Man kan også skrive

$$\psi^{\gamma} = \underset{\sim}{D}^{m} : \underset{\sim}{\xi}^{\gamma} : \underset{\sim}{D}^{n} \quad , \quad m,n = 0,1,2,3 \tag{28.55}$$

hvor $\underset{\sim}{\xi}^{\gamma}$ er tensorer af fjerde orden som beskriver den pågældende symmetri. Hermed kan man beskrive op til 4-fold drejninger, og da udtrykket (28.55) indeholder (28.52), er det mere generelt. Strukturtensorerne $\underset{\sim}{\xi}^{\gamma}$ findes blandt tensorerne $\underset{\sim}{G}^{\gamma}$ i (27.16) og (27.37).

28.2.2 Vektorfunktioner

Vektorer, som er funktioner af en vektor $\overline{v}$ og invariante under en drejning $\underset{\sim}{R}$ om en akse $\hat{a}$, kan skrives

$$\overline{u} = \alpha_\gamma \underset{\sim}{\xi}^\gamma \cdot \overline{v} \tag{28.56}$$

hvor α_γ er skalære funktioner af $\overline{v} \cdot \overline{v}$ og $\overline{v} \cdot \hat{a}$, og $\underset{\sim}{\xi}^\gamma$ er lig med de andenordens frembringertensorer $\underset{\sim}{G}^\gamma$, som beskriver den pågældende symmetri i henhold til afsnit 27.2.1. Eksempelvis har man, at

$$\overline{u}(\overline{v}) = \left(\alpha_1 \underset{\sim}{I} + \alpha_2 \hat{j}\hat{j} + \alpha_3 \hat{k}\hat{k}\right) \cdot \overline{v} \tag{28.57}$$

udviser 2-fold symmetri om $\hat{j}$ og $\hat{k}$ og dermed også om $\hat{\imath}$.

28.2.3 Andenordens tensorfunktioner

Andenordens tensorer som er funktioner af en andenordens tensor $\underset{\sim}{D}$ og invariante under en drejning $\underset{\sim}{R}$ om en akse $\hat{a}$ kan f.eks. skrives $\underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{\xi}^\gamma$ og $\underset{\sim}{\xi}^\gamma \cdot \underset{\sim}{D}$, hvor $\underset{\sim}{\xi}^\gamma$ er andenordens tensorer $\underset{\sim}{G}^\gamma$ fra afsnit 27.2.1. Mere generelt kan man imidlertid skrive sådanne tensorer

$$\underset{\sim}{M}^\gamma = \underset{\sim}{D} : \underset{\sim}{\xi}^\gamma \quad \text{og} \quad M^\beta = \underset{\sim}{\xi}^\beta : \underset{\sim}{D} \tag{28.58}$$

hvor $\underset{\sim}{\xi}^\gamma$ er lig med de fjerdeordens tensorer, som beskriver den pågældende symmetri i henhold til afsnit 27.2.2. En anisotrop funktion af $\underset{\sim}{D}$ kan herefter skrives

$$\underset{\sim}{U}(\underset{\sim}{D}) = \varphi_\gamma \underset{\sim}{D} : \underset{\sim}{\xi}^\gamma + \varphi_\beta \underset{\sim}{\xi}^\beta : \underset{\sim}{D} + \cdots + \varphi_\kappa \underset{\sim}{D}^2 : \underset{\sim}{\xi}^\kappa + \cdots + \varphi_\omega \underset{\sim}{\xi}^\omega : \underset{\sim}{D}^T \tag{28.59}$$

Eksempelvis kan en isotrop tensorfunktion skrives

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{U}(\underset{\sim}{D}) &= \underset{\sim}{D} : (\varphi_1 \underset{\sim}{G}^1 + \varphi_2 \underset{\sim}{G}^2 + \varphi_3 \underset{\sim}{G}^3) + \underset{\sim}{D}^2 : (\varphi_4 \underset{\sim}{G}^1 + \varphi_5 \underset{\sim}{G}^2 + \varphi_6 \underset{\sim}{G}^3) = \\
&= \varphi_1 \underset{\sim}{D} : \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I} + \varphi_2 \underset{\sim}{D} : \underset{\sim}{J} + \varphi_3 \underset{\sim}{D} : \underset{\sim}{T} \\
&\quad + \varphi_4 \underset{\sim}{D}^2 : \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I} + \varphi_5 \underset{\sim}{D}^2 : \underset{\sim}{J} + \varphi_6 \underset{\sim}{D}^2 : \underset{\sim}{T} \\
&= \varphi_1' \underset{\sim}{I} + \varphi_2 \underset{\sim}{D} + \varphi_3 \underset{\sim}{D}^T + \varphi_5 \underset{\sim}{D}^2 + \varphi_6 (D^2)^T
\end{aligned} \tag{28.60}$$

hvor φ_γ og φ_γ' er skalære funktioner af $\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^2, \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D}^3$ og $\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{D}^T$.

Kontinuum

ISSN 1395-7953 R9911
Instituttet for Bygningsteknik
Aalborg Universitet, Juli 1999
Sohngaardsholmsvej 57, 9000 Aalborg
Tlf.: 9635 8080 Fax: 9814 8243
http://www.civil.auc.dk/i6